Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Die folgenden Aufgaben behandeln Stoff, der aus den vorhergehenden Semestern bekannt sein sollte. Gegebenenfalls sollten Sie Lücken nacharbeiten.

Aufgabe 1
Schlagen Sie die Logarithmengesetze nach, und behalten Sie diese für den weiteeren Verlauf des Studiums präsent.

Aufgabe 2
Sei $B = (V, E)$ ein (gerichteter) binärer Baum mit Wurzel w. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Die Höhe des Baumes B beträgt mindestens $\log |V|$.
2. Die Höhe des Baumes B beträgt höchstens $\log |V|$.
3. Mindestens $\frac{|V|}{2}$ Knoten des Baumes B sind Blätter.
4. Höchstens $\frac{|V|}{2}+1$ Knoten des Baumes B sind Blätter.

Aufgabe 3
Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 4
Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n\,,\ \sqrt{\log n}\,,\ \sqrt{n}\,,\ (\log\sqrt{n})^2\,,\ \frac{n}{\log n}\,,\ n^2\,,\ n^k\ (\text{für}\ \ k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 3)\,,\ n^{\log n}\,,\ n^{\log\log n}\,,\ \log(n^2)\,,\ (\log n)^2\,,\ n^n\,,$
$\log\log\log n\,,\ \sum_{i=0}^{n} i\,,\ \sum_{i=0}^{n} i^2\,,\ 2^{n\log n}\,,\ (\sqrt{\log n})^{\log\log n}\,.$

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden $\mathcal{O}$– bzw. o–Beziehungen.

Aufgabe 5
Zeigen Sie: $\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n+\log(n)) = \mathcal{O}(\log(n^2))$

Aufgabe 6
Sei $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ die Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ($f, g \in \mathcal{F}_{\text{tot}}$): ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in o(h) \implies f \in o(h)$
3. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in o(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{O}(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
5. Die Relation $R_{o} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in o(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
6. Die Relation $R_{\Omega} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \Omega(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Aufgabe 7
Welche $\mathcal{O}$– bzw. o–Beziehungen gibt es zwischen den folgenden Funktionen?

$f_1(n) := n^3$

$$f_2(n) := \begin{cases} n^2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) := \begin{cases} n^5 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_4(n) := \begin{cases} n^n & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ 2^{n \cdot \log(n)} \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$f_5(n) := n!$

Beweisen Sie die Eigenschaften.

Aufgabe 8
Beweisen oder widerlegen die folgenden Aussagen.

1. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus o(g) \implies g \in \mathcal{O}(f)$
2. Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit: $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$
3. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus o(g) \implies f \in \Omega(g)$
4. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f) \implies f \in \Omega(g)$

Aufgabe 9
Geben Sie Funktionen f und g (von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$) an, so dass weder $f \in \mathcal{O}(g)$ noch $g \in \mathcal{O}(f)$. Beweisen Sie diese Eigenschaften.

Aufgabe 10
Seien $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ totale Funktionen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

1. $f \in \mathcal{O}(g) \iff \limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty$
2. $f \in o(g) \iff \limsup_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$

Aufgabe 11
Zu einer (totalen) Funktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir die Funktion $\underline{h} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ vermöge $\underline{h}(n) = \lfloor h(n) \rfloor$.
Seien nun f und g streng monoton wachsende totale Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenen Aussagen.

1. $f \in o(g) \implies \underline{f^{-1}} \in o(\underline{g^{-1}})$
2. $f \in o(g) \implies \underline{g^{-1}} \in o(\underline{f^{-1}})$
3. $f \in \mathcal{O}(g) \implies \underline{f^{-1}} \in \mathcal{O}(\underline{g^{-1}})$

Hinweis: Denken Sie zum Beispiel an Exponieren und Logarithmieren.