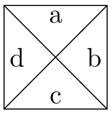
Strukturelle Komplexitätstheorie

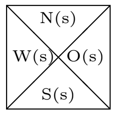
Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 6

Aufgabe 1
Vergleichen Sie die in der Vorlesung beschriebene Reduktion von 3SAT auf Exact Cover mit der Reduktion von 3SAT auf dreidimensionales Matching, die im Buch "Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness" von Michael R. Garey and David S. Johnson beschrieben wird.

Aufgabe 2
Wir betrachten eine endliche Menge D von quadratischen Dominosteinen (mit Einheitsgröße), die an ihren Seiten mit Farben aus einer einer endlichen Farbenmenge F markiert sind (oBdA 'weiß' $\in F$). Die Steine dürfen nicht gedreht werden. Sie dürfen allerdings mehrfach gelegt werden (also Herstellen einer Kopie des Steins und Legen dieser Kopie). Zu einem Stein $s = (a, b, c, d) \in F^4$ bezeichnen $N(s)$, $O(s)$, $S(s)$, $W(s)$ jeweis die Farben an den vier Seiten.

Stein $s = (a, b, c, d)$: 

Stein $s = (N(s), O(s), S(s), W(s))$: 

Wir können uns jetzt fragen, ob bei einem gegebenen Satz von Steinen eine bestimmte Fläche (Quadrat, Rechteck, Ebene, Halbebene,. . .) so parkettierbar ist, dass die Farben aneinandergrenzender Dominosteine jeweils übereinstimmen, gegebenfalls unter Beachtung zusätzlicher Randbedigungen.

Für ein $(n \times n)$-Quadrat ($n \in \mathbb{N}$) und eine Steinmenge $D = \{s_1, \ldots, s_k\}$ könnte man die Frage, "Gibt es eine Parkettierung mit weißem Rand?" wie folgt formalisieren:

Gibt es eine totale Funktion $f : \{1, \ldots, n\}\times \{1, \ldots, n\} \to S$ mit:

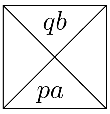
- $N(f(i, j)) = S(f(i, j + 1))$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n - 1$
- $O(f(i, j)) = W(f(i + 1, j))$ für $i = 1, \ldots, n - 1$ und $j = 1, \ldots, n$
- $N(f(i, n)) =$ 'weiß' für $i = 1, \ldots, n$
- $O(f(n, j)) =$ 'weiß' für $j = 1, \ldots, n$
- $S(f(i, 1)) =$ 'weiß' für $i = 1, \ldots, n$
- $W(f(1, j)) =$ 'weiß' für $j = 1, \ldots, n$

Zeigen Sie:

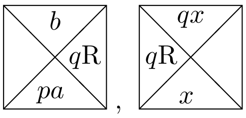
1. SQUARE-TILING := $\{x\$^n \mid$ x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times n)$-Quadrat mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NP-vollständig.
2. Bin-SQUARE-TILING := $\{x\,\mathrm{bin}(n) \mid$ x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n\times n)$-Quadrat mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NEXPTIME-vollständig.
3. RECTANGLE-TILING := $\{x\$^n \mid \exists m \in \mathbb{N}$: x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times m)$-Rechteck mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NPSPACE-vollständig.
4. Bin-RECTANGLE-TILING := $\{x\,\mathrm{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N}$: x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times m)$-Rechteck mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NEXPSPACE-vollständig.

Hinweis: Bilden Sie Berechnungen einer Halbband-Turuing-Maschine $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ nach:

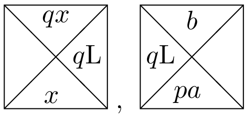
Dominos für die Befehle:

$(p, a, q, b, N) \in \delta$: 

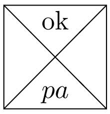
,

$(p, a, q, b, R) \in \delta$: 

für alle $x \in \Gamma$.

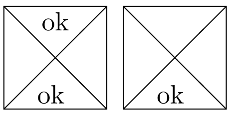
$(p, a, q, b, L) \in \delta$: 

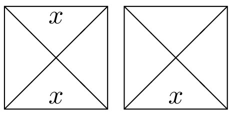
für alle $x \in \Gamma$.



falls kein Befehl mit pa existiert und $p \in F$.

Dominos für das Auffüllen**:**



und 

für alle $x \in \Gamma$.

Bemerkung: Im Artikel "The Convenience of Tilings" von Peter Van Emde Boas (In Complexity, Logic, and Recursion Theory, 1997) kann nachgelesen werden, wie SQUARE-TILING auf andere Probleme reduziert wird.