Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1

Recherchieren Sie den Cocke-Yonger-Kasami-Algorithmus. Skizieren Sie für eine feste kontextfreie Grammatik $G = (T, N, P, S)$ eine Implementierung des Algorithmusses auf einer Mehrband-Turingmachine mit kubischer Laufzeit.

Hinweise: Speichern Sie die Matrix jeweils zeilen- und spaltenweise auf getrennten Arbeitsbändern. Nutzen Sie z.B. im Arbeitsalphabet Zeichen aus $\{0,1\}^{|N|}$ zum Darstellen einer Teilmenge aus N.

Aufgabe 2

Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$L_1 := \{a^n c a^m c a^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \wedge \ k = n \cdot m\}$$
$$L_2 := \{\text{bin}(n) c \, \text{bin}(m) c \, \text{bin}(k) \mid n, m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \wedge \ k = n \cdot m\}$$

Zu L_1 und L_2 betrachten wir die im Folgenden kurz beschriebenen Turing-Maschinen M_1 und M_2, welche L_1 und L_2 entscheiden: im Wesentlichen subtrahieren die Turing-Maschinen n m-mal vom Startwert k; wird dadurch genau 0 erreicht, so wird akzeptiert ansonsten verworfern. (Natürlich müssen M_1 und M_2 auch prüfen, dass die Eingabe die korrekte Form hat.)

1. Wird durch die Turing-Maschinen M_1 und M_2 bezeugt, dass L_1 und L_2 in P liegen?
2. Liegen L_1 und L_2 in P?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 3

Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen)::

$$\begin{aligned} L_1 := \{\text{bin}(n_0)c \dots c \, \text{bin}(n_k) \mid \ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \forall i \in \{0, \dots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \ \text{ und} \\ & \exists J \subseteq \{1, \dots, k\} : \sum_{i \in J} n_l = n_0 \ \ \} \\ L_2 := \{\text{bin}(n_0)c \dots c \, \text{bin}(n_k) \mid \ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \forall i \in \{0, \dots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\ & \exists J \subseteq \{0, \dots, k\} : \sum_{i \in J} n_i \quad = \sum_{i \in \{0,\dots,k\} \setminus J} n_i \ \ \} \end{aligned}$$

1. Zeigen Sie: $L_1 \in \text{NP}$ und $L_2 \in \text{NP}$.
2. Zeigen Sie: $L_1 \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} L_2$.

Bemerkung: Sowohl L_1 als auch L_2 sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knappsack, Partition).

Aufgabe 4
Für $i \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Variabeln X_i und Y_i sowie die im Folgenden induktiv definierten logischen Formeln F_i :

$$\begin{array}{lcl} F_0 & := & X_0 \wedge Y_0 \\ F_{i+1} & := & (X_{i+1} \wedge Y_{i+1}) \vee F_i \end{array}$$

1. Wandeln Sie die Formeln mittels den Distributivgesetzen in Formeln in konjunktiver Normalform um.
2. Bestimmen Sie jeweils die Länge der entstehenden Formeln.

Aufgabe 5 (Euler Kreis)
Wir betrachten das Euler-Kreis-Problem:

Instanz: Graph $G = (V, E)$.
Frage: Hat G einen Euler-Kreis (einen Kreis, in dem alle Kanten aus E genau einmal vorkommen)?

Wie kann dieses Entscheidungsproblem codiert werden? Was wäre die Eingabegröße? Zeigen Sie, dass das Problem in P liegt.