

Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1

Recherchieren Sie die Logarithmen-Gesetze und machen Sie sich mit deren Anwendung vertraut.

Aufgabe 2

Zeigen Sie, dass es zu jeder polynomial laufzeitbeschränkten nichtdeterministischen Turing-Maschine M eine äquivalente polynomial laufzeitbeschränkte nichtdeterministische Turing-Maschine M' gibt mit den folgenden Eigenschaften:

1. Nur im Startzustand kann es mehrere Befehle bei gleichem gelesenen Zeichen geben (nichtdeterministisches Verhalten).
2. Bei allen anderen Zuständen gibt für jedes Zeichen höchstens einen anwendbaren Befehl (deterministisches Verhalten).
3. Nach dem Verlassen des Startzustandes kehrt M' nie mehr in den Startzustand zurück.

Aufgabe 3

Zeigen Sie, dass die folgende Definition von NP äquivalent ist zu der Definition, die in der Vorlesung gegeben wurde:

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist in NP genau dann, wenn es eine Sprache A in P und ein Polynom p gibt, so dass

$$L = \{x \mid \exists y \in \Sigma^* : |y| < p(|x|) \wedge \langle x, y \rangle \in A\}.$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME}$$

Aufgabe 5

Zeigen Sie, dass alle Sprachen aus NP entscheidbar sind.

Aufgabe 6

Zeigen Sie:

$$\text{CFL} \subset \text{P}$$

Aufgabe 7

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$)

1. $(A \leq_m^{\text{poly}} B) \implies (A \leq_m B)$
2. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge B \in \text{P}) \implies A \in \text{P}$
3. $(A \leq_m^{\text{poly}} B \wedge A \notin \text{NP}) \implies B \notin \text{NP}$.
4. $(A \in \text{P}$ entscheidbar, $B \neq \emptyset$, $B \neq \{0, 1\}^*$, dann ist $A \leq_m^{\text{poly}} B$.
5. $(A \text{ NP-vollständig} \wedge A \in \text{P}) \implies (\text{P} = \text{NP})$.

Aufgabe 8

Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0, 1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich \leq_m^{poly})

1. (A NP-vollständig und $A \leq_m^{\text{poly}} B$ und $B \in \text{NP} \implies B$ NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.

Aufgabe 9

Welche der Eigenschaften “reflexiv”, “symmetrisch”, “antisymmetrisch”, “transitiv” haben die Relationen \leq_m^{poly} bzw. \equiv_m^{poly} auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0, 1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 10

$\text{bin}(i)$ bezeichne die Binärdarstellung (niederwertigstes Bit hinten, ohne führende Nullen) der Zahl i ($i \in \mathbb{N}$). Sei

$$L_{\text{Bin}} := \{\text{bin}(1)\# \text{bin}(2)\# \dots \# \text{bin}(k) \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}.$$

1. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.
2. Geben Sie eine deterministische Turing-Maschine mit einem two-way read-only Inputband und einem Arbeitsband an, die L_{Bin} in Platz $\log \log$ entscheidet.. (Bitte nur das Programmverhalten skizzieren.)

Aufgabe 11

Recherchieren Sie den *Chinesischen Restsatz* sowie den *Primzahlsatz*.

Aufgabe 12

Zeigen Sie mit Hilfe der vorstehenden Aufgabe:

$$\exists c \in \mathbb{Q}: c > 0 \wedge \text{kgV}(2, 3, \dots, n) > 2^{cn}$$

Hinweis: Betrachten Sie das Produkt der teilerfremden Zahlen $p^{\lfloor \log_p n \rfloor}$ über die Primzahlen $p \leq n$.

Aufgabe 13

Sei $L := \{a^m b^k \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge m \neq k\}$. Zeigen Sie, dass es eine deterministische Turing-Maschine mit einem two-way read-only Inputband und einem Arbeitsband gibt, die alle Wörter l aus L mit Platz $\log \log$ akzeptiert. Der Platzverbrauch auf Wörtern in $\bar{L} := \{a, b\}^* \setminus L$ ist nicht beschränkt.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst mit Hilfe der beiden vorhergehenden Aufgaben:

$$\exists c \in \mathbb{N} \forall m, k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} : (m \neq k \implies \exists j \in \mathbb{N} : (2 \leq j < c \cdot \log(\max(m, k)) \wedge m \bmod j \neq k \bmod j))$$