Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Besprechung in KW 45 / Abgabe in KW 46

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 18, 19, 20, 21, 22 und 23

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen die reguläre Pumping-Eigenschaft haben, jedoch nicht regulär sind.

$$L_2 := \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\}$$
$$L_3 := \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\}$$
$$L_4 := L((a \cup b)^* \cdot (aa \cup bb) \cdot (a \cup b)^*) \;\cup\; \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\}$$

Hinweis: Zeigen Sie, dass die zur Sprache gehörende Relation jeweils unendlich viele Klassen hat.

Aufgabe 4
Sei $\Sigma = \{a,b\}$ ein Alphabet, $\alpha = (a \cup aba)^* \cdot a$ ein regulärer Ausdruck über Σ und $L = \mathcal{L}(\alpha)$. Konstruieren Sie ein λ-NFA zu L, einen DFA zu L, einen DFA zu $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ sowie einen regulären Ausdruck zu $\overline{L}$. Beschreiben Sie das Konstruktionsverfahren.

Aufgabe 5
Seien $M' = (Q', \Sigma, \delta', q_0', F')$ und $M'' = (Q'', \Sigma, \delta'', q_0'', F'')$ zwei NFA mit $Q' \cap Q'' = \emptyset$. Wir konstruieren den NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0', F)$ mit $Q = Q' \cup Q'' \setminus \{q_0''\}$, $\delta = \delta' \cup \{(f(q), a, f(p)) \mid (q,a,p) \in \delta''\}$, $F = F' \cup \{f(q) \mid q \in F''\}$, wobei

$$f : Q'' \longrightarrow Q'' \backslash \{q_0''\} \cup \{q_0'\} \quad \text{mit} \quad f(q) = \begin{cases} q & \text{falls } q \neq q_0'', \\ q_0' & \text{falls } q = q_0'' \end{cases}$$

(Die beiden Startzustände werden identifiziert.)
Erkennt im Allgemeinen M die Sprache $L(M') \cup L(M'')$?

Aufgabe 6
Sei $\Sigma = \{a,b,c\}$, A und B vollständige deterministische finite Automaten, $\sim_A$ und $\sim_B$ die zu den Automaten gehörenden Rechtskongruenzrelationen, $\approx_{L(A)}$ und $\approx_{L(B)}$ die zu den erkannten Sprachen gehörenden Rechtskongruenzrelationen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

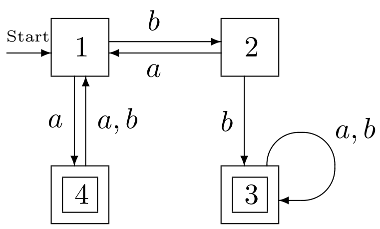
1. $L(A) = L(B) \implies \sim_A = \sim_B$.
2. $L(A) = L(B) \implies \approx_{L(A)} = \approx_{L(B)}$.
3. $\approx_{L(A)} \supseteq \sim_A$.

Aufgabe 7
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, $\$ \notin \Sigma$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

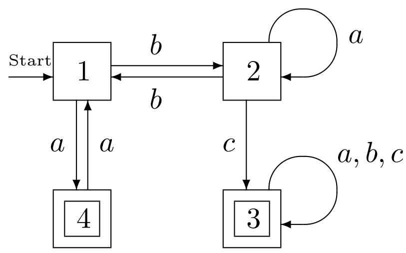
1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur unendlich große Klassen hat.
2. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat und L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt wird.
3. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilmenge $L' \subseteq L$.
4. Werden L und L' von DFA erkannt, so auch $(\{a\} \cdot L) \cup (\{b\} \cdot L')$.
5. Wird L von einem DFA erkannt und wird L' von keinem DFA erkannt, so wird $L \cup L'$ auch von keinem DFA erkannt.
6. Ist $\{\$\} \cdot L$ regulär, so ist auch L regulär.
7. Jede endliche Sprache ist regulär.
8. Ist $L \cup L'$ regulär, so sind auch L und L' regulär.
9. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i\in\mathbb{N}} L_i$ auch regulär.
10. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle endlich, so ist $\cup_{i\in\mathbb{N}} L_i$ auch endlich.

Aufgabe 8
Gegeben seien die folgenden finiten Automaten (der Startzustand s ist durch “Start” gekennzeichnet, die akzeptierenden Zustände durch die doppelte Einrahmung). Wir betrachten die zu den Automaten gehörende Rechtskongruenzrelationen $\sim_M$. Wieviele Klassen haben diese Äquivalenzrelationen. Beschreiben Sie die einzelnen Klassen jeweils durch reguläre Ausdrücke.

M_1 (mit $\Sigma_1 = \{a, b\}$)



M_2 (mit $\Sigma_2 = \{a, b, c\}$)



Die Automaten erkennen Sprachen. Zu diesen Sprachen gehören wiederum Rechtskongruenzrelationen. Geben Sie an, wieviele Klassen die entsprechenden Relationen jeweils haben, und beschreiben Sie die einzelnen Klassen jeweils durch reguläre Ausdrücke!

Aufgabe 9
Welche Sprachen werden von den folgenden finiten Automaten A_k und B_k mit $k \in \mathbb{N}$ erkannt?

$$A_k := (\{0, \dots, k\}\, , \{a, b\}\, , 0\, , \Delta_k\, , \{k\}) \text{ und}$$
$$B_k := (\{a, b\}^k\, , \{a, b\}\, , b^k\, , \Delta'_k\, , \{a\}\cdot\{a, b\}^{k-1})$$

wobei:

$$\Delta_k := \{(0, a, 0), (0, b, 0), (0, a, 1)\} \;\cup\; \{(i, x, i+1) \mid i \in \{1, \dots, k-1\} \wedge x \in \{a, b\}\}$$
$$\Delta'_k := \{(xw, y, wy) \;\mid x, y \in \{a, b\} \wedge w \in \{a, b\}^{k-1}\}$$

Aufgabe 10
Sei $L_k := \{w \in \{a, b\}^+ \mid \text{das } k\text{-letzte Zeichen von } w \text{ ist } a\}$ für $k \in N \setminus \{0\}$. Zeigen Sie für jedes $k \in N \setminus \{0\}$:

1. Es gibt einen NFA mit $k + 1$ Zuständen, der L_k erkennt.
2. Kein vollständiger DFA mit weniger als 2^k Zustände erkennt L_k.
   Hinweis: Denken Sie an die zu L_k gehörende Relation $\approx_{L_k}$.
3. Es gibt einen vollständigen DFA mit 2^k Zuständen, der L_k erkennt.

Aufgabe 11
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie: Entweder wird L von einem deterministischen finiten Automaten erkannt oder alle Klassen der zu L gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ sind einelementig.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: $\forall p, q \in \mathbb{N} : a^p \approx_L a^{p+q} \implies \{a^{p+iq} \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq [a^p]_{\approx_L}$

Aufgabe 12
Sei $\Sigma = \{a, b\}$, L und R Sprachen über Σ und $h : \Sigma^* \to \Sigma^*$ ein Homomorphismus (bezüglich der Konkatenation). Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $h(L \cap R) = h(L) \cap h(R)$
2. $h^{-1}(L \cap R) = h^{-1}(L) \cap h^{-1}(R)$
3. $h(L \cup R) = h(L) \cup h(R)$
4. $h^{-1}(L \cup R) = h^{-1}(L) \cup h^{-1}(R)$
5. $L = h^{-1}(h(L))$
6. $L = h(h^{-1}(L))$
7. $h(L \cdot R) = h(L) \cdot h(R)$
8. $h(L \cdot R) = h(L) \cup h(R)$

Hinweis: Außer bei den Teilaufgaben 7 und 8 wird die Homomorphieeigenschaft nicht gebraucht. Die Teilaufgaben benötigen nur, dass h eine totale Funktion ist.

Aufgabe 13
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines deterministischen finiten Automaten A feststellt, ob das Komplement der erkannten Sprachen $L(A)$ unendlich ist.

Aufgabe 14
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe zweier nichtdeterministischer finiter Automaten A_1 und A_2 feststellt, ob die erkannten Sprachen $L(A_1)$ und $L(A_2)$ gleich sind.

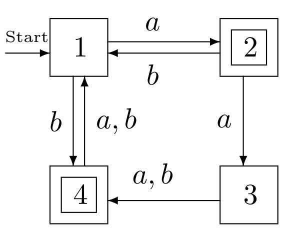
Aufgabe 15
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man zu einem regulären Ausdruck α über einem Alphabet Σ einen regulären Ausdruck für $\overline{\mathcal{L}(\alpha)} = \Sigma^* \setminus \mathcal{L}(\alpha)$ erzeugen kann.

Aufgabe 16
Skizzieren Sie ein Verfahren, mit dem man bei Eingabe eines nichtdeterministischer finiten Automaten A feststellt, ob die erkannte Sprachen $L(A)$ leer, endlich oder unendlich ist.

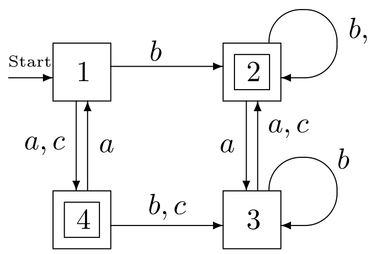
Aufgabe 17 (für gute Studierende)
Sei $\Sigma = \{a\}$ ein einelementiges Alphabet und $L \subseteq \Sigma^*$ eine beliebige Sprache über $\Sigma = \{a\}$. Zeigen Sie, dass L^* regulär ist.

Aufgabe 18
Gleiche Aufgabenstellung wie in Aufgabe 8, jedoch mit den Automaten M_3 und M_4.

M_3 (mit $\Sigma_3 = \{a, b\}$)



M_4 (mit $\Sigma_4 = \{a, b, c\}$)



Aufgabe 19
Sei $\Sigma = \{a, b\}$ ein Alphabet und $\$ \notin \Sigma$ ein weiteres Zeichen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen.

1. Es gibt eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$, so dass die zu L gehörende Rechtskongruenzrelation $\approx_L$ nur endlich große Klassen hat
2. Zu jedem $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gibt es eine Sprache $L_n \subseteq \Sigma^*$ so dass der Index (d.h. die Anzahl der Äquivalenzklassen) der zu L_n gehörenden Rechtskongruenzrelation $\approx_{L_n}$ genau n ist.
3. Zu jeder Sprache L die von einem DFA A erkannt wird, gibt es unendlich viele weitere DFA, die die gleiche Sprache erkennen und deren Zustandsanzahlen alle verschieden sind.
4. Wird L von einem DFA erkannt, so auch jede Teilsprache L' mit $L' \subseteq L \subseteq \Sigma^*$.
5. Ist $L \cap L'$ nicht-regulär, so sind weder L noch L' regulär.
6. Wird L von einem vollständigen DFA mit p Zuständen erkannt und L' von einem vollständigen DFA mit q Zuständen erkannt, so gibt es vollständige DFAs mit pq Zuständen die $L \cup L'$ bzw. $L \cap L'$ erkennen,.
7. Sind für $i \in \mathbb{N}$ die Sprachen L_i alle regulär, so ist $\cup_{i \in \mathbb{N}} L_i$ auch regulär.

Aufgabe 20
Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $M = (Q, \Sigma, \delta, (0,0), F)$ ein deterministischer endlicher Automat mit

$$Q = \{(i,j) \in \mathbb{N} \mid 0 \leq i \leq 1 \ \wedge \ 0 \leq j \leq 2\} \ ,$$
$$\delta = \{(i,j), a, (i+1 \bmod 2 \ , \ j \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 3 \ \}$$
$$\cup \{(i,j), b, (i \ , \ j+1 \bmod 3 \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 3\}$$
$$\cup \{(i,j), c, (i \ , \ j-1 \bmod 3 \ ) \in \mathbb{N}^2 \times \Sigma \times \mathbb{N}^2 \ \mid \ i \leq 1 \ , \ j \leq 3\} \ , \text{ und}$$
$$F = \{(0,0)\}.$$

Welche der folgenden Wörtern $abc, aabcc, aa, aabcb, aababaaa$ werden von M akzeptiert? Beschreiben Sie die von M erkannte Sprache. Begründen sie Ihre Antwort.

Aufgabe 21
Zu einem NFA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ konstruieren wir den Automaten $M' = (Q, \Sigma, \delta', q_0, \{q_0\})$ mit $\delta' = \delta \cup \{(p, \lambda, q_0) \mid p \in F\}$ (der Startzustand q_0 wird einziger Endzustand, von jedem alten Endzustand geht eine λ-Transition zum Startzustand). Gilt $L(M') = L(M)^*$ für jeden finiten Automaten M?

Aufgabe 22
Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4:

$$\begin{array}{lcl} L_2 & := & \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \ w \text{ enthält weniger } a\text{'s als } b\text{'s}\} \\ L_3 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist eine Quadratzahl oder } |w| \text{ ist eine Kubikzahl}\} \\ L_4 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid \ |w| \text{ ist keine Primzahl}\} \end{array}$$

Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.

Aufgabe 23
Wir betrachten die Sprachen L_2, L_3 und L_4:

$$\begin{array}{lcl} L_2 & := & \{w \in \{a,b,c\}^* \mid aa, ab, ba \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } w \text{ enthält genau so viele } a\text{'s wie } b\text{'s}\} \\ L_3 & := & \{w \in \{a,b\}^* \mid aa \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } bb \text{ ist Teilwort von } w \text{ oder } |w| \text{ ist eine Quadratzahl}\} \\ L_4 & := & L((a+b)^* \cdot (aa+bb) \cdot (a+b)^*) \cup \{w \in \{a,b\}^* \mid |w| \text{ ist Primzahl}\} \end{array}$$

1. Zeigen Sie, die Sprachen L_2, L_3 und L_4 die reguläre Pumpingeigenschaft haben.
2. Zeigen Sie, dass die Sprachen L_2, L_3 und L_4 nicht regulär sind.