Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 14

Besprechung in KW 05 / Abgabe in KW 06 (in HG 2.16)

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 11, 12, 13 und 14

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Definitionen:

$$
\begin{array}{lll}
L \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} L' & \iff & L \textbf{ (many-one) polynonial reduzierbar } \text{auf } L' \\
 & :\iff & \exists\, f : \Sigma_L^* \to \Sigma_{L'}^* \text{ total und polynomialzeit-berechenbar mit } \;(w \in L \iff f(w) \in L') \\
L \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} L' & :\iff & (L \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} L' \;\wedge\; L' \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} L)
\end{array}
$$

Für eine Sprachklasse $\mathcal{L}$ heisst eine Sprache A **$\mathcal{L}$-vollständig** bzgl. der Reduktion $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ genau dann, wenn $A \in \mathcal{L}$ und $\forall L \in \mathcal{L} : L \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} A$.

$\text{NPC} := \{L \in \text{NP} \mid L \text{ ist NP-vollständig bzgl. der Reduktion } \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}\}$

Aufgabe 3
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen):

$$
\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^n c a^m c a^k \mid n, m, k \in \mathbb{N} \wedge k = n \cdot m\} \\
L_2 &:= \{\text{bin}(n) c \,\text{bin}(m) c \,\text{bin}(k) \mid n, m, k \in \mathbb{N} \wedge k = n \cdot m\}
\end{aligned}
$$

Zu L_1 und L_2 betrachten wir die im Folgenden kurz beschriebenen Turing-Maschinen M_1 und M_2, welche L_1 und L_2 entscheiden: im Wesentlichen subtrahieren die Turing-Maschinen n m-mal vom Startwert k; wird dadurch genau 0 erreicht, so wird akzeptiert ansonsten verworfern. (Natürlich müssen M_1 und M_2 auch prüfen, dass die Eingabe die korrekte Form hat.)

1. Wird durch die Turing-Maschinen M_1 und M_2 bezeugt, dass L_1 und L_2 in P liegen?
2. Liegen L_1 und L_2 in P?

Begründen Sie Ihre Antworten.

Aufgabe 4
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B, L \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B) \implies (A \leq_{\text{mo}} B)$
2. $(A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \wedge B \in \text{P}) \implies A \in \text{P}$
3. $(A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B \wedge A \notin \text{NP}) \implies B \notin \text{NP}$.
4. ($A \in \text{P}$ entscheidbar $\wedge$ $B \neq \emptyset$ $\wedge$ $B \neq \{0,1\}^*$), dann ist $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$.
5. (A NP-vollständig $\wedge\, A \in \text{P}$) $\implies$ ($\text{P} = \text{NP}$).

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen in P liegen:

$$\begin{aligned}
L_1 &:= \{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\
L_2 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\
L_3 &:= \{\text{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = m^2\} \\
L_4 &:= \{a^n \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\
L_5 &:= \{\text{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N} : n = 2^m\} \\
L_6 &:= \{wcvcu \mid w, v, u \in \{a,b\}^* \wedge (w = v \vee w = u)\} \\
L_7 &:= \{a^p \mid p \text{ ist Primzahl}\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$, vollständig jeweils bezüglich $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$)

1. (A NP-vollständig und $A \leq_{\text{mo}}^{\text{poly}} B$ und $B \in \text{NP}$) $\implies$ B NP-vollständig.
2. Keine nichtentscheidbare Sprache ist NP-vollständig.
3. Jede nicht-triviale Sprache in P ist P-vollständig.

Aufgabe 7
Welche der Eigenschaften "reflexiv", "symmetrisch", "antisymmetrisch", "transitiv" haben die Relationen $\leq_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ bzw. $\equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}}$ auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet $\{0,1\}^*$? Beweisen Sie jeweils Ihre Antwort.

Aufgabe 8
Wir betrachten die folgenden Sprachen L_1 und L_2 ($\text{bin}(n)$ bezeichnet die Binärdarstellung von n, niederwertigste Bits hinten, ohne führende Nullen)::

$$\begin{aligned}
L_1 := \{\text{bin}(n_0)c \ldots c\,\text{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
& \forall i \in \{0, \ldots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
& \exists J \subseteq \{1, \ldots, k\} : \sum_{i \in J} n_l = n_0 \ \} \\
L_2 := \{\text{bin}(n_0)c \ldots c\,\text{bin}(n_k) \mid\ & k \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
& \forall i \in \{0, \ldots, k\} : n_i \in \mathbb{N} \quad \text{und} \\
& \exists J \subseteq \{0, \ldots, k\} : \sum_{i \in J} n_i = \sum_{i \in \{0,\ldots,k\} \setminus J} n_i \ \}
\end{aligned}$$

1. Zeigen Sie: $L_1 \in \text{NP}$ und $L_2 \in \text{NP}$.
2. Zeigen Sie: $L_1 \equiv_{\text{mo}}^{\text{poly}} L_2$.

Bemerkung: Sowohl L_1 als auch L_2 sind NP-vollständig (vgl. in der Literatur: Knappsack, Partition).

Aufgabe 9
Zeigen Sie:

1. $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \iff \overline{A} \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} \overline{B}$.
2. $(A \in \mathrm{NPC} \wedge \mathrm{NP} \neq \text{co-NP}) \Longrightarrow (\{1\}\cdot A \cup \{2\}\cdot \overline{A} \notin \mathrm{NP} \cup \text{co-NP})$.

Aufgabe 10
Zeigen Sie:

1. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{REC}$
2. $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$
3. $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{REC}$

Aufgabe 11
Zeigen Sie, dass die Klassen P und NP unter Vereinigung, Schnittbildung, Konkatenation und inverserm Homomorphismus abgeschlossen sind.

Aufgabe 12
Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$):

1. co-P $=$ P .
2. $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \implies B \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} A$.
3. $(A \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\} \wedge B \in \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\}) \implies A \equiv_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B$.
4. Auf der Menge aller Sprachen über dem Alphabet Σ ist die Relation $\leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}}$ antisymmetrisch.
5. $H := \{\langle u, v\rangle \mid u$ ist Code einer TM und $M_u(v)\downarrow\} \in \mathrm{P}$

Aufgabe 13
Zeigen Sie: (Σ endliches Alphabet, $A, B \subseteq \{0,1\}^*$)

1. $(A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \wedge B \in \mathrm{NP}) \implies A \in \mathrm{NP}$.
2. $(A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \wedge A \notin \mathrm{P}) \implies B \notin \mathrm{P}$.
3. $A \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B \iff \overline{A} \leq_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} \overline{B}$.
4. Sind A und B NP-vollständig, so gilt $A \equiv_{\mathrm{mo}}^{\mathrm{poly}} B$.
5. $(\mathrm{NPC} \cap \mathrm{P} \neq \emptyset) \implies (\mathrm{NP} = \mathrm{P})$.
6. $(\mathrm{P} = \mathrm{NP}) \Longrightarrow (\mathrm{NPC} = \mathrm{P} \setminus \{\emptyset, \Sigma^*\})$.

Aufgabe 14
Zeichen Sie ein Venn-Diagramm mit den folgenden Sprachklasssen: CFL, P, NP, co-NP, REC und RE. Tragen Sie die Sprachen $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ und H in dieses Venndiagramm ein.

Termin der Endklausur:
Donnerstag, 30. März 2017, 8:00 - 11:00, ZHG Hörsaal B

Fragestunden in der vorlesungssfreien Zeit nach Vereinbarung