Theoretische Informatik

Prof. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 13

Besprechung in KW 04 / Abgabe in KW 05

Heften Sie unbedingt alle Blätter Ihrer Lösung zusammen und geben Sie oben auf dem ersten Blatt Ihren Namen und Vornamen an.

Kriterium für erfolgreiche Bearbeitung des Übungsblattes:
Bearbeitung von:
- Aufgabe 1,
- Aufgabe 2, wird aber nicht korrigiert,
- Aufgaben 9, 10, 11 und 12

Aufgabe 1
Führen Sie ein Zeitprotokoll. Schreiben Sie an jede Aufgabe, wie lange Sie an dieser Aufgabe gearbeitet haben. Bereiten Sie die bis jetzt gehaltenen Vorlesungen nach! Geben Sie ebenfalls an, wieviel Zeit Sie hierfür aufgewendet haben.

Aufgabe 2
Schreiben Sie alle in der Vorlesung neu vorgekommenen Definitionen auf!

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die folgenden Sprachen L_1und L_2 nicht aufzählbar sind.

$$\begin{array}{lcl} L_1 & := & \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } L(M_v) = \Sigma^*\} \\ L_2 & := & \{v \mid v \text{ ist Code einer TM und } \forall x : M_v(x) \downarrow \lambda\} \end{array}$$

Hinweis: Reduzieren sie $\overline{H_1} = \{u \mid u \text{ ist Code einer TM und } M_u(u) \uparrow\}$ auf die Sprachen.

Aufgabe 4
Sei Σ ein Alphabet, so dass für das Halteproblem H gilt: $H \subset \Sigma^*$ und sei c ein weiteres Zeichen, das nicht in Σ liegt. Betrachten Sie den Homomorphismus $h : (\Sigma \cup \{c\})^* \to (\Sigma \cup \{c\})^*$ für den $h(c) = \lambda$ und $h(a) = a$ für alle $a \in \Sigma$ sowie die Sprache:

$$L := \{w \in (\Sigma \cup \{c\})^* \mid \exists \alpha, \beta \in (\Sigma \cup \{c\})^* \ \exists a, b \in \Sigma : w = \alpha{\cdot}a{\cdot}b{\cdot}\beta\}$$

Zeigen Sie, dass $\{w \in (\Sigma \cup \{c\})^* \mid h(w) \in H \ \vee \ w \in L\}$ nicht entscheidbar ist, aber die reguläre Pumpingeigenschaft hat.

Aufgabe 5
Zeigen Sie, dass es nicht-entscheidbare Sprachen gibt, welche die reguläre Pumpingeigenschaft haben.

Aufgabe 6
Seien $L, L' \subseteq \{a, b\}^*$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sind L und L' entscheidbar, so sind auch $L \cap L'$ und $L \cup L'$ entscheidbar
2. Ist $L \cap L'$ entscheidbar, so sind auch L und L' entscheidbar.
3. Ist $L \cup L'$ aufzählbarbar, so sind auch L und L' aufzählbar.
4. Sind L und L' nicht entscheidbar, so ist auch $L \cup L'$ nicht-entscheidbar..
5. Ist L^* aufzählbar, so ist auch L aufzählbar.

Aufgabe 7
Zeigen Sie, dass es Sprachen L_0, L_1, L_2, L_3 sowie L'_0, L'_1, L'_2, L'_3 gibt mit

1. $L_0 \subset L_1 \subset L_2 \subset L_3$, und
2. $L'_0 \supset L'_1 \supset L'_2 \supset L'_3$, und
3. L_3, L'_3 regulär, L_2, L'_2 kontextfrei und nicht-regulär, L_1, L'_1 entscheidbar und nicht-kontextfrei und L_0, L'_0 aufzählbar und nicht-entscheidbar.

Aufgabe 8
Wir betrachten ein einelementiges Alphabet Σ (also $|\Sigma| = 1$) sowie eine beliebige Sprache $L \subseteq \Sigma^*$. Zeigen Sie, dass L^* entscheidbar ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass in diesem Fall L^* sogar regulär ist

---

Aufgabe 9
Zeichnen Sie ein Venn-Diagramm mit den Sprachklassen, die durch die Chomsky-Typ-i-Grammatiken festgelegt werden ($i = 0, 1, 2, 3$), den endlichen Sprachen, den entscheidbaren Sprachen sowie der Klasse aller Sprachen. Tragen Sie für $j = 1, \ldots, 6$ die folgenden Sprachen $L_j := \{a^n b^{f(n)} \mid n \in \mathrm{Def}(f_j)\}$ ein, wobei die Funktionen $f_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert sind durch:

$$\begin{aligned}
f_1(n) &= 2 \cdot n \\
f_2(n) &= n^2 \\
f_3(n) &= 2^n \\
f_4(n) &= \chi_{\mathrm{UN}(H_1)}(n) \quad \text{(charakteristische Funktion von } \mathrm{UN}(H_1) \text{)} \\
f_5(n) &= \chi'_{\mathrm{UN}(H_1)}(n) \quad \text{(semi-charakteristische Funktion von } \mathrm{UN}(H_1) \text{)} \\
f_6(n) &= \chi'_{\overline{\mathrm{UN}(H_1)}}(n) \quad \text{(semi-charakteristische Funktion von } \overline{\mathrm{UN}(H_1)} \text{)}
\end{aligned}$$

Begründen Sie Ihre Eintragungen!

$\mathrm{UN}(H_1)$ ist die unäre Version des Selbstanwenderproblems.

Aufgabe 10
Zeigen Sie, dass es nicht-aufzählbare Sprachen gibt, welche die reguläre Pumpingeigenschaft haben.

Aufgabe 11
Seien $L, L' \subseteq \{a, b\}^*$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Sind L und L' entscheidbar, so sind auch $L \cap L'$ und $L \cup L'$ entscheidbar
2. Ist $L \cup L'$ entscheidbar, so sind auch L und L' entscheidbar.
3. Sind L und L' nicht-entscheidbar, so ist auch $L \cup L'$ nicht-entscheidbar..
4. Ist L^* entscheidbar, so ist auch L entscheidbar.. .

Aufgabe 12
Betrachten Sie ein Alphabet Σ und für $i \in \mathbb{N}$ Sprachen $L_i \subseteq \Sigma^*$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. $(\forall i \in \mathbb{N} : L_i \in \mathrm{REG}) \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i \in \mathrm{REG}$
2. $(\forall i \in \mathbb{N} : L_i \in \mathrm{CFL}) \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i \in \mathrm{CFL}$
3. $(\forall i \in \mathbb{N} : L_i \in \mathrm{REC}) \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i \in \mathrm{REG}$
4. $(\forall i \in \mathbb{N} : L_i \in \mathrm{RE}) \Longrightarrow \bigcup_{i \in \mathbb{N}} L_i \in \mathrm{RE}$
