Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 5

Aufgabe 1 (Translationslemma für Platz)
Sei $f, g > \log$ und $h > \mathrm{id}$ mit h auf $(\log \circ h)$-band-berechenbar. Zeigen Sie, dass dann gilt (X,Y$\in$ {D,N}):

$$\mathrm{XSPACE}(f) \subseteq \mathrm{YSPACE}(g) \implies \mathrm{XSPACE}(f \circ h) \subseteq \mathrm{YSPACE}(g \circ h)$$

Hinweis: Zu einer Sprache L definieren wir die Sprache $L_\# = \{w\#^i \mid w \in L, i = h(n) - n, |w| = n\}$. Wo liegt $L_\#$, wenn L in XSPACE($f \circ h$) liegt? Und umgekehrt?

Aufgabe 2 (Translationslemma für Zeit)
Sei $f, g > (1+\varepsilon)\cdot\mathrm{id}$ für ein $\varepsilon > 0$ und $h > \mathrm{id}$ mit h zeit-konstruiebar. Zeigen Sie, dass dann gilt (X,Y$\in$ {D,N}):

$$\mathrm{XTIME}(f) \subseteq \mathrm{YTIME}(g) \implies \mathrm{XTIME}(f \circ h) \subseteq \mathrm{YTIME}(g \circ h)$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie

1. $\mathrm{P} \subset \mathrm{EXPTIME}$
2. $\mathrm{PSPACE} \subset \mathrm{EXPSPACE}$

Aufgabe 4
Zeigen Sie:

1. $\mathrm{P}^{\mathrm{NP}} = \mathrm{P}^{\mathrm{SAT}}$
2. $\mathrm{NP}^{\mathrm{NP}} = \mathrm{NP}^{\overline{\mathrm{SAT}}}$
3. $\mathrm{P}^{\mathrm{P}} = \mathrm{P}$
4. $\mathrm{NP}^{\mathrm{P}} = \mathrm{NP}$
5. $\mathrm{NP}^{\mathrm{NP}} = \mathrm{NP}^{\mathrm{co-NP}}$
6. $\mathrm{P}^{\mathrm{P}^{\mathrm{NP}}} = \mathrm{P}^{\mathrm{NP}}$

Aufgabe 5
Sei $\mathcal{L}$ eine Komplexitätsklasse und L eine $\mathcal{L}$-vollständige Sprache bezüglich $\leq_{\mathrm{T}}$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{P}^{\mathcal{L}} = \mathrm{P}^{L}$ und $\mathrm{NP}^{\mathcal{L}} = \mathrm{NP}^{L}$ gilt.

Aufgabe 6
Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

1. $\mathrm{P}^{\Delta_k^{\mathrm{P}}} = \Delta_k^{\mathrm{P}}$
2. $\mathrm{P}^{\mathrm{P}^{\Delta_k^{\mathrm{P}}}} = \Delta_k^{\mathrm{P}}$
3. $\Sigma_k^{\mathrm{P}} \cup \Pi_k^{\mathrm{P}} \subseteq \Delta_{k+1}^{\mathrm{P}}$
4. $\Delta_{k+1}^{\mathrm{P}} \subseteq \Sigma_{k+1}^{\mathrm{P}} \cap \Pi_{k+1}^{\mathrm{P}}$

Aufgabe 7
Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$::

$$\left(\left(\Sigma_k^{\mathrm{p}} \subseteq \Pi_k^{\mathrm{p}}\right) \vee \left(\Pi_k^{\mathrm{p}} \subseteq \Sigma_k^{\mathrm{p}}\right)\right) \implies \left(\Sigma_k^{\mathrm{p}} = \Pi_k^{\mathrm{p}}\right)$$

Aufgabe 8
Zeigen Sie:
Gilt für $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass $\Sigma_k^{\mathrm{p}} = \Pi_k^{\mathrm{p}}$, so gilt für alle $l \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, dass $\Sigma_{k+l}^{\mathrm{p}} = \Pi_{k+l}^{\mathrm{p}} = \Delta_{k+l}^{\mathrm{p}} = \Sigma_k^{\mathrm{p}}$.

Aufgabe 9
Zu einer Sprache L definieren wir $L^{\circledast} := \{\langle x_1, \ldots, x_r\rangle \mid r \in \mathbb{N}\,\text{und}\, x_1, \ldots, x_r \in L\}$. Zeigen Sie.

1. Mit $L \in \mathrm{NP}$ gilt auch $L^{\circledast} \in \mathrm{NP}$
2. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $L \in \Delta_k^{\mathrm{P}} \iff L^{\circledast} \in \Delta_k^{\mathrm{P}}$
3. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $L \in \Sigma_k^{\mathrm{P}} \iff L^{\circledast} \in \Sigma_k^{\mathrm{P}}$
4. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt: $L \in \Pi_k^{\mathrm{P}} \iff L^{\circledast} \in \Pi_k^{\mathrm{P}}$

Aufgabe 10
Zeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

1. $\exists^{\mathrm{P}}\,\mathrm{P} = \mathrm{NP}$
2. $:\forall^{\mathrm{P}}\,\mathrm{P} = \mathrm{co}-\mathrm{NP}$
3. $\exists^{\mathrm{P}}\Sigma_k^{\mathrm{P}} = \Sigma_k^{\mathrm{P}}$
4. $\forall^{\mathrm{P}}\Sigma_k^{\mathrm{P}} = \Pi_{k+1}^{\mathrm{P}}$
5. $\exists^{\mathrm{P}}\Pi_k^{\mathrm{P}} = \Sigma_{k+1}^{\mathrm{P}}$
6. $\forall^{\mathrm{P}}\Pi_k^{\mathrm{P}} = \Pi_k^{\mathrm{P}}$

Aufgabe 11
Wir definieren $\mathrm{PH} := \cup_{k\in\mathbb{N}}\Sigma_k^{\mathrm{P}}$. Zeigen SieZeigen Sie für $k \in \mathbb{N}$:

1. $\mathrm{PH} \subseteq \mathrm{PSPACE}$
2. $(\mathrm{PH} = \mathrm{PSPACE}) \Longrightarrow \left(\exists k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \Sigma_k^{\mathrm{p}} = \Sigma_{k+1}^{\mathrm{p}}\right)$
   Hinweis: In PSPACE gibt es vollständige Probleme, z.B. die Sprache QBF.