Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 4

Aufgabe 1
Recherchieren Sie die Potenz- und Logarithmengesetze!

Aufgabe 2
Bestimmen Sie für $a, b \in \mathbb{R}$:

1. $\frac{\log_a(n)}{\log_b(n)}$
2. $\log(a^{\log_b n} \cdot b^{\log(n^2)})$
3. $n^{\frac{n}{\log n}}$
4. $2^{a \cdot \log n} + n^3$

Aufgabe 3
Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen echte Komplexitätsfunktionen sind:

$$\log n \ , \ \sqrt{n} \ , \ \frac{n}{\log n} \ , \ n \cdot \log n \ , \ n^k \ (f\ddot{u}r \ \ k \in \mathbb{N} \, , \, k \geq 1) \ , \ 2^n \, , n^n$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass mit f und g auch $f + g$, $f \cdot g$ und f^g echte Komplexitätsfunktionen sind.

Aufgabe 5
Beweisen Sie den in der Vorlesung vorgestellten Satz "lineare Beschleunigung" für Komplexitätsfunktionen oberhalb von id.

Aufgabe 6
Geben Sie eine streng monotone, totale Funktion von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die keine echte Komplexitätsfunktion ist?

Aufgabe 7
$\text{bin}(i)$ bezeichne die Binärdarstellung (niederwertigstes Bit hinten, ohne führende Nullen) der Zahl i ($i \in \mathbb{N}$). Sei

$$L_{\text{Bin}} := \{\text{bin}(1)\# \, \text{bin}(2)\# \cdots \# \, \text{bin}(k) \mid k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \ \}.$$

1. Zeigen Sie, dass L nicht regulär ist.
2. Geben Sie eine deterministische 0DT^1-Maschine an, die L erkennt.
3. Geben Sie eine deterministische 1DT^1-Maschine an, die L mit $\log\log$ (starkem) Platzverbrauch erkennt. [stark beschränkt: alle Läufe halten die Schranke ein, 1DT^1: Turingmacheine mit einem Arbeitsband und einem one-way read-only Inputband]

(Bitte nur das Programmverhalten skizieren.)

Aufgabe 8
Sei $L := \{a^n b^m \mid n, m \in \mathbb{N} \,\mathrm{mit}\, n \neq m\}$. Zeigen Sie, dass es schwach $\log\log$ beschränkte 1NT und 2DT Maschinen gibt, die L erkennen. [schwach beschränkt: bei akzeptierten Wörtern muss mindestens ein Lauf die Schranke einhalten, keine Beschränkung bei nichtakzeptierten Worten]

Hinweis: Zeigen Sie zunächst:

$$n \neq m \implies \exists (l \in \mathbb{N} : l \leq 8 \log(n+m) \ \wedge \ n \bmod l \neq m \bmod l)$$

Aufgabe 9
Wir definieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{kN}(n) &:= \min\{t \in N \mid t > 1\ ,\ t \text{ teilt } n \text{ nicht}\} \\ \mathrm{gkN}(n) &:= \max\{\mathrm{kN}(\nu) \mid \nu \in \{1, \ldots n\}\ \} \end{aligned}$$

1. Erstellen Sie per Rechner eine möglichst grosse Tabelle mit den Spalten n, $\log(n)$, $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$.
2. Tragen Sie die Werte in ein Diagramm ein.
3. In welcher Größenordnung liegen die Funktionen $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$?
4. Zeigen Sie: $\mathrm{kN} \in \boldsymbol{\mathcal{O}}(\log)$
5. Sei $L := \{a^i b^j \mid i, j \in N, j = \mathrm{kN}(i)\}$. Zeigen Sie: $L \in \mathrm{DSPACE}(\log\log)$.

Hinweis: Recherchieren Sie die Aussage des Primzahlsatzes und wenden Sie diesen an.