Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 3

Aufgabe 1
Für $i \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Variabeln X_i und Y_i sowie die im Folgenden induktiv definierten logischen Formeln F_i :

$$\begin{array}{lcl} F_0 & := & X_0 \wedge Y_0 \\ F_{i+1} & := & X_{i+1} \wedge (Y_{i+1} \vee F_i) \end{array}$$

1. Wandeln Sie die Formeln mittels den Distributivgesetzen in Formeln in konjunktiver Normalform um.
2. Bestimmen Sie jeweils die Länge der entstehenden Formeln.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Menge der (bzgl. $\leq_\mathrm{p}$) P-vollständigen Sprachen.

Aufgabe 3
Zu einer Sprachklasse $\mathcal{L}$ definieren wir co-$\mathcal{L}$ vermöge co-$\mathcal{L} := \{L \mid \overline{L} \in \mathcal{L}\}$. Zeigen Sie:

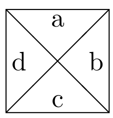
1. co-P = P
2. co-REC = REC
3. RE $\cap$ co-RE = REC
4. Ist L NP-vollständig, so ist $\overline{L}$ co-P-vollständig

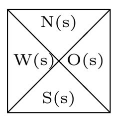
Aufgabe 4 (Euler Kreis)
Wir betrachten das Euler-Kreis-Problem:

Instanz: Graph $G = (V, E)$.
Frage: Hat G einen Euler-Kreis (einen Kreis, in dem alle Kanten aus E genau einmal vorkommen)?

Wie kann dieses Entscheidungsproblem codiert werden? Was wäre die Eingabegröße? Zeigen Sie, dass das Problem in P liegt.

Aufgabe 5 (Dominospiel)
Wir betrachten eine endliche Menge D von quadratischen Dominosteinen (mit Einheitsgröße), die an ihren Seiten mit Farben aus einer einer endlichen Farbenmenge F markiert sind (oBdA 'weiß' $\in F$). Die Steine dürfen nicht gedreht werden. Sie dürfen allerdings mehrfach gelegt werden (also Herstellen einer Kopie des Steins und Legen dieser Kopie). Zu einem Stein $s = (a, b, c, d) \in F^4$ bezeichnen $N(s)$, $O(s)$, $S(s)$, $W(s)$ jeweils die Farben an den vier Seiten.

Stein $s = (a, b, c, d)$: 

Stein $s = (N(s), O(s), S(s), W(s))$: 

Wir können uns jetzt fragen, ob bei einem gegebenen Satz von Steinen eine bestimmte Fläche (Quadrat, Rechteck, Ebene, Halbebene,...) so parkettierbar ist, dass die Farben aneinandergrenzender Dominosteine jeweils übereinstimmen, gegebenfalls unter Beachtung zusätzlicher Randbedigungen.

Für ein $(n \times n)$-Quadrat ($n \in \mathbb{N}$) und eine Steinmenge $D = \{s_1, \ldots, s_k\}$ könnte man die Frage, "Gibt es eine Parkettierung mit weißem Rand?" wie folgt formalisieren:

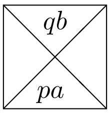
Gibt es eine totale Funktion $f : \{1, \ldots, n\} \times \{1, \ldots, n\} \to S$ mit:
- $N(f(i,j)) = S(f(i,j+1))$ für $i = 1, \ldots, n$ und $j = 1, \ldots, n-1$
- $O(f(i,j)) = W(f(i+1,j))$ für $i = 1, \ldots, n-1$ und $j = 1, \ldots, n$
- $N(f(i,n)) =$ 'weiß' für $i = 1, \ldots, n$
- $O(f(n,j)) =$ 'weiß' für $j = 1, \ldots, n$
- $S(f(i,1)) =$ 'weiß' für $i = 1, \ldots, n$
- $W(f(1,j)) =$ 'weiß' für $j = 1, \ldots, n$

Zeigen Sie:

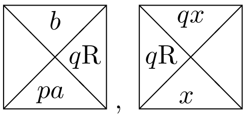
1. SQUARE-TILING := $\{x\$^n \mid$ x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times n)$-Quadrat mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NP-vollständig.
2. Bin-SQUARE-TILING := $\{x\,\mathrm{bin}(n) \mid$ x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times n)$-Quadrat mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NEXPTIME-vollständig.
3. RECTANGLE-TILING := $\{x\$^n \mid \exists m \in \mathbb{N}$: x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times m)$-Rechteck mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NPSPACE-vollständig.
4. Bin-RECTANGLE-TILING := $\{x\,\mathrm{bin}(n) \mid \exists m \in \mathbb{N}$: x ist Code eines Dominosatzes D mit dem das $(n \times m)$-Rechteck mit weißem Rand parkettierbar ist$\}$ ist NEXPSPACE-vollständig.

Hinweis: Bilden Sie Berechnungen einer Halbband-Turuing-Maschine $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ nach:

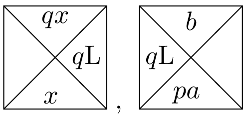
Dominos für die Befehle:

$(p, a, q, b, N) \in \delta$: 

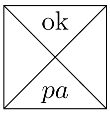
,

$(p, a, q, b, R) \in \delta$: 

für alle $x \in \Gamma$.

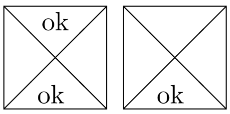
$(p, a, q, b, L) \in \delta$: 

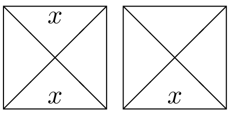
für alle $x \in \Gamma$.



falls kein Befehl mit pa existiert und $p \in F$.

Dominos für das Auffüllen**:**



und


für alle $x \in \Gamma$.