Strukturelle Komplexitätstheorie

Prof. Dr. Meer, Dr. Gengler

Aufgabenblatt 1

Aufgabe 1
Zeigen Sie, dass es zu jeder polynomial laufzeitbeschränkten nichtdeterministischen Turing-Maschine M eine äquivalnete polynomial laufzeitbeschränkte nichtdeterministische Turing-Maschine M' gibt mit den folgenden Eigenschaften:

1. Nur im Startzustand kann es mehrere Befehle bei gleichem gelesenen Zeichen geben (nichtdeterministisches Verhalten).
2. Bei allen anderen Zuständen gibt für jedes Zeichen höchstens einen anwendbaren Befehl (deterministisches Verhalten).
3. Nach dem Verlassen des Startzustandes kehrt M' nie mehr in den Startzustand zurück.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass die folgende Definition von NP äquivalent ist zu der Definition, die in der Vorlesung gegeben wurde:

> Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist in NP genau dann, wenn es eine Sprache A in P und ein Polynom p gibt, so dass
> $$L = \{x \mid \exists y \in \Sigma^* : |y| < p(|x|) \ \wedge \ \langle x, y\rangle \in A\}.$$

Aufgabe 3
Zeigen Sie:
$$\text{NP} \subseteq \text{EXPTIME}$$

Aufgabe 4
Zeigen Sie, dass alle Sprachen aus NP entscheidbar sind.

Aufgabe 5
Zeigen Sie:
$$\text{CFL} \subset \text{P}$$

Aufgabe 6
Schlagen Sie die Regel von (de) L'Hôpital nach.

Aufgabe 7
Ordnen Sie folgende Funktionen nach ihren Wachstumseigenschaften:

$\log n$, $\sqrt{\log n}$, $\sqrt{n}$, $(\log \sqrt{n})^2$, $\frac{n}{\log n}$, n^2 , n^k (für $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$) , $n^{\log n}$, $n^{\log\log n}$, $\log(n^2)$, $(\log n)^2$, n^n , $\log\log\log n$, $\sum_{i=0}^{n} i$, $\sum_{i=0}^{n} i^2$, $2^{n \log n}$, $(\sqrt{\log n})^{\log\log n}$.

Beweisen Sie jeweils die entsprechenden $\mathcal{O}$– bzw. $\boldsymbol{o}$–Beziehungen.

Aufgabe 8
Zeigen Sie: $\mathcal{O}(\log) = \mathcal{O}(\log_{10}) = \mathcal{O}(\ln) = \mathcal{O}(\log(2n)) = \mathcal{O}(\log(n + \log(n)) = \mathcal{O}(\log(n^2))$

Aufgabe 9
Sei $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ die Menge der totalen Funktionen von $\mathbb{N}_0$ nach $\mathbb{N}_0$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen ($f, g \in \mathcal{F}_{\text{tot}}$): ($\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \setminus \{0\}$)

1. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in \mathcal{O}(h)$
2. $f \in \mathcal{O}(g)$ und $g \in o(h) \implies f \in o(h)$
3. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(h) \implies f \in o(h)$
4. Die Relation $R_{\mathcal{O}} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \mathcal{O}(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
5. Die Relation $R_{o} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in o(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.
6. Die Relation $R_{\Omega} := \{(f,g) \in \mathcal{F}_{\text{tot}} \times \mathcal{F}_{\text{tot}} \mid f \in \Omega(g)\ \}$ ist eine Äquivalenzrelation.auf der Menge $\mathcal{F}_{\text{tot}}$ der totalen Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Aufgabe 10
Beweisen oder widerlegen die folgenden Aussagen.

1. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus o(g) \implies g \in \mathcal{O}(f)$
2. Es gibt Funktionen $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit: $f \notin \mathcal{O}(g)$ und $g \notin \mathcal{O}(f)$
3. $f \in \mathcal{O}(g) \setminus o(g) \implies f \in \Omega(g)$
4. $f \in o(g)$ und $g \in \mathcal{O}(f) \implies f \in \Omega(g)$

Aufgabe 11
Wir definieren:

$$\begin{aligned} \mathrm{kN}(n) &:= \min\{t \in \mathbb{N} \mid t > 1\ ,\ t \text{ teilt } n \text{ nicht}\} \\ \mathrm{gkN}(n) &:= \max\{\mathrm{kN}(\nu) \mid \nu \in \{1, \ldots n\}\ \} \end{aligned}$$

1. Erstellen Sie per Rechner eine möglichst grosse Tabelle mit den Spalten n, $\log(n)$, $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$.
2. Tragen Sie die Werte in ein Diagramm ein.
3. In welcher Größenordnung liegen die Funktionen $\mathrm{kN}(n)$, $\mathrm{gkN}(n)$?

Bemerkung: Beweise zum Wachstum der Funktionen kommen später in der Vorlesung / Übung.

Aufgabe 12
Geben Sie Funktionen f und g (von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$) an, so dass weder $f \in \mathcal{O}(g)$ noch $g \in \mathcal{O}(f)$. Beweisen Sie diese Eigenschaften.

Aufgabe 13
Welche $\mathcal{O}$– bzw. o–Beziehungen gibt es zwischen den folgenden Funktionen?

$f_1(n) := n^3$

$$f_2(n) := \begin{cases} n^2 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^4 & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_3(n) := \begin{cases} n^5 & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ n^2 \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$$f_4(n) := \begin{cases} n^n & \text{, falls } n \text{ gerade} \\ 2^{n \cdot \log(n)} \cdot \log(n) & \text{, sonst} \end{cases}$$

$f_5(n) := n!$

Beweisen Sie die Eigenschaften.