

Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE
---------	--------------	--------

Aufgabe 1: Von Lichtschaltern und Primzahlen

(Aufgabe (a): 4 Punkte, (b): 3 Punkte, (c): 3 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilen.

- (a) Vor euch befinden sich 2023 Lichtschalter. Diese sind von 1 bis 2023 durchnummeriert. Die zugehörigen 2023 Lampen sind zu Beginn alle aus. Nun macht ihr wie folgt 2023 Züge: Im n . Zug betätigt ihr jeden n . Lichtschalter. Im ersten Zug betätigt ihr also alle Schalter, im zweiten Zug alle mit einer geraden Zahl, im dritten Zug jeden dritten Lichtschalter und so weiter. Im letzten Zug betätigt ihr nur den Lichtschalter mit der Nummer 2023.

Wie viele Lampen sind am Ende an? (*Eure Antwort ist zu beweisen!*)

- (b) Wir betrachten Paare $(k, k+1)$ aufeinanderfolgender Zahlen mit der Eigenschaft, dass in beiden Zahlen jeder Primfaktor mindestens in der zweiten Potenz vorkommt. Zwei Beispiele hierfür sind $(8, 9)$ und $(288, 289)$: $8 = 2^3, 9 = 3^2, 288 = 2^5 3^2, 289 = 17^2$. Beweist, dass es unendlich viele solcher Zahlenpaare gibt!
- (c) Findet alle ganzen Zahlen $a, b \geq 0$, für die $4 \cdot 20^{20a} + 23^{24b}$ eine Primzahl ist. (*Eure Antwort ist zu beweisen!*)

Platz für die Lösung:

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, equal-sized squares formed by thin gray lines. There are no margins, text, or other markings on the page.

- (a) **(4 Punkte)** Der Lichtschalter mit der Nummer k wird genau dann im n . Zug betätigt, wenn n ein Teiler von k ist. Insbesondere wird der Lichtschalter in diesem Fall auch im k/n . Zug betätigt. Die Äquivalenz $n = k/n \Leftrightarrow n^2 = k$ impliziert, dass für jede Zahl k , die keine Quadratzahl ist, der entsprechende Lichtschalter gerade oft betätigt wird, da es dann zu jedem Teiler n von k den von n verschiedenen Teiler k/n gibt. Alle Lichtschalter mit einer Quadratzahl als Beschriftung werden hingegen ungerade oft betätigt. Letztere sind es, deren Lampen am Ende eingeschaltet sind. Wegen $44^2 = 1936 < 2023 < 2025 = 45^2$ sind es daher 44 Lampen.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für die korrekte Angabe der 44 Lampen
- 1 Punkt für die Beobachtung, dass es einen Zusammenhang zur Anzahl der Teiler einer Zahl gibt
- 1 Punkt für die Beobachtung, dass die Lampen, die mit Quadratzahlen nummeriert sind, eingeschaltet sind
- 1 Punkt für die korrekte Begründung

- (b) **(3 Punkte)** Ist $(k, k+1)$ ein solches Zahlenpaar, so auch

$$(2k(2k+2), 2k(2k+2)+1) = (2^2k(k+1), (2k+1)^2).$$

Bepunktungsvorschlag:

- 2 Punkte für die Konstruktion geeigneter Zahlenpaare
- 1 Punkt für die Begründung oder eine nachvollziehbare Darstellung dafür, dass sie die gewünschte Eigenschaft erfüllen

- (c) **(3 Punkte)** Der Trick besteht darin, den Ausdruck mittels binomischer Formeln zu faktorisieren (die zugrunde liegende Faktorisierung ist auch als Identität von Sophie Germain bekannt):

$$\begin{aligned} 4 \cdot 20^{20a} + 23^{24b} &= 4 \cdot 20^{20a} + 4 \cdot 20^{10a} \cdot 23^{12b} + 23^{24b} - 4 \cdot 20^{10a} \cdot 23^{12b} \\ &= \left(2 \cdot 20^{10a} + 23^{12b}\right)^2 - \left(2 \cdot 20^{5a} \cdot 23^{6b}\right)^2 \\ &= \left(2 \cdot 20^{10a} + 23^{12b} + 2 \cdot 20^{5a} \cdot 23^{6b}\right) \left(2 \cdot 20^{10a} + 23^{12b} - 2 \cdot 20^{5a} \cdot 23^{6b}\right). \end{aligned}$$

Der erste Faktor ist offenbar stets größer als 1, der zweite kann als $(20^{5a} - 23^{6b})^2 + 20^{10a} \geq 1$ mit Gleichheit genau für $a = b = 0$ geschrieben werden. Damit kann die Zahl $4 \cdot 20^{20a} + 23^{24b}$ für $(a, b) \neq (0, 0)$ keine Primzahl sein. Für $a = b = 0$ ergibt sich die Zahl $4 \cdot 20^{20a} + 23^{24b} = 4 + 1 = 5$, welche eine Primzahl ist. Damit ist $(a, b) = (0, 0)$ das einzige Zahlenpaar mit dieser Eigenschaft.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für die Angabe der Lösung $a = b = 0$
- 1 Punkt für die Faktorisierung
- 1 Punkt für die Begründung, dass beide Faktoren größer als 1 sind, wenn nicht $a = b = 0$ gilt

Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE
---------	--------------	--------

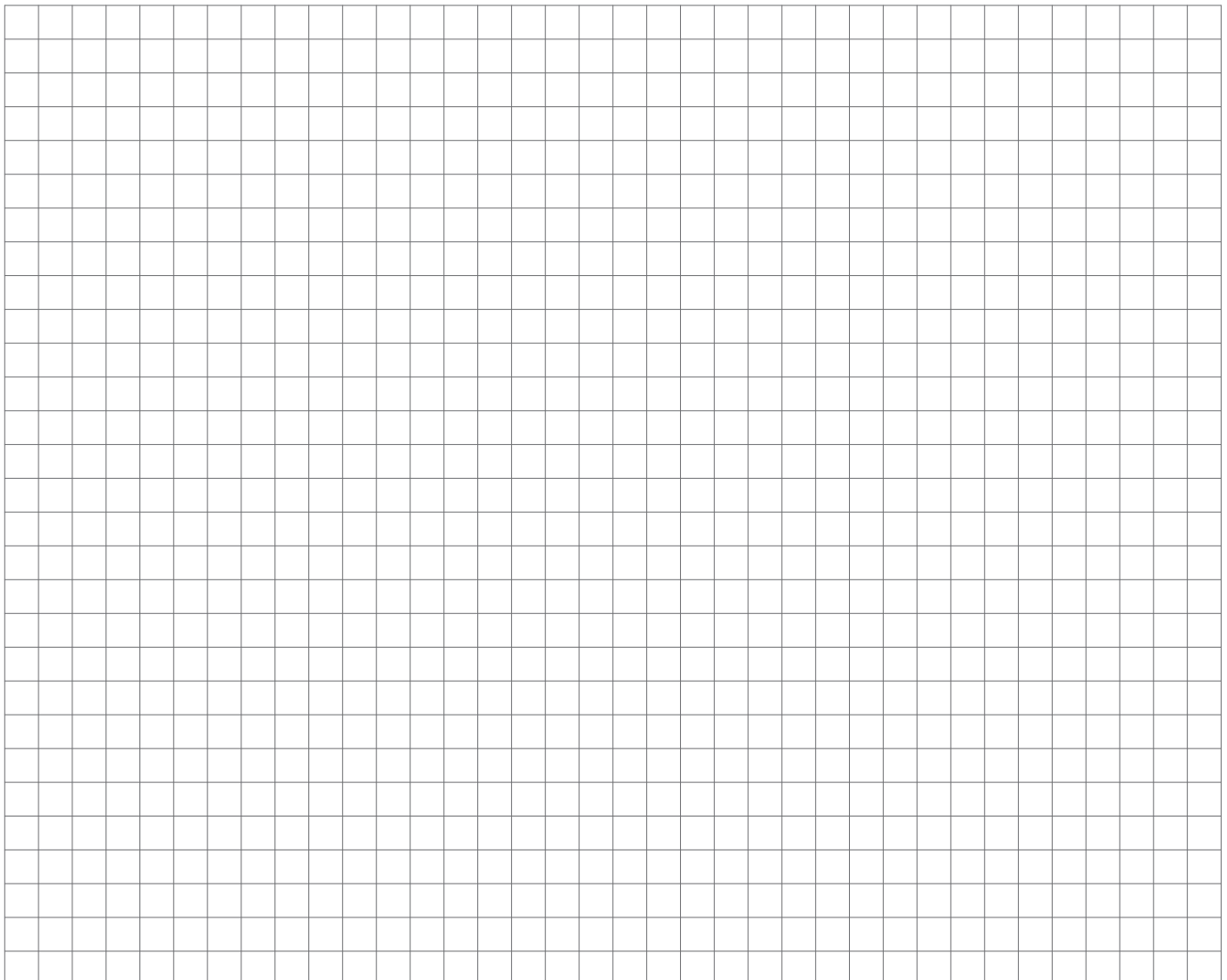
Aufgabe 2: Winkel über Winkel

(Aufgabe (a): 4 Punkte, (b): 3 Punkte, (c): 3 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilen.

- In der Ebene seien eine Strecke $\overline{AB}$ und eine Gerade g gegeben, die diese Strecke in ihrem Inneren schneidet. Beschreibt alle Situationen, in denen kein eindeutiger Punkt C gefunden werden kann, sodass g die Winkelhalbierende des Dreiecks $\triangle ABC$ ist. Beschreibt in allen anderen Fällen, wie dieser Punkt C allein mit Zirkel und Lineal konstruiert werden kann.
- Gegeben sei ein Dreieck $\triangle ABC$ mit dem Innenwinkel $|\angle ACB| = 120^\circ$. Es seien F_a, F_b, F_c die Schnittpunkte der Winkelhalbierenden mit den Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ beziehungsweise $\overline{AB}$. Beweist, dass das Dreieck $\triangle F_a F_b F_c$ rechtwinklig ist.
- Gegeben sei das konvexe Viereck $\triangle ABCD$. Die Diagonale $\overline{BD}$ teile den Winkel $\angle ABC$ in die beiden Winkel $|\angle ABD| = 20^\circ$ und $|\angle DBC| = 20^\circ$; die Diagonale $\overline{AC}$ teile den Winkel $\angle BAD$ in die beiden Winkel $|\angle BAC| = 20^\circ$ und $|\angle CAD| = 80^\circ$. Berechne den Winkel $|\angle BDC|$.

Platz für die Lösung:



- (a) **(4 Punkte)** Geht g durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$, so müsste g gleichzeitig Winkel- und Seitenhalbierende sein. Da die Winkelhalbierende die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, folgt daraus $|AC| = |BC|$, sodass $\triangle ABC$ gleichschenkelig wäre. Dann ist g aber auch die Mittelsenkrechte. In diesem Fall erfüllt aber jeder Punkt C die gewünschte Eigenschaft. Steht g senkrecht auf $\overline{AB}$, so müsste g gleichzeitig Höhe und Winkelhalbierende sein, woraus mit $|\angle BAC| = |\angle CBA|$ wieder die Gleichschenkligkeit folgt.

Daher gibt es keinen eindeutigen Punkt C , wenn g die Strecke $\overline{AB}$ halbiert oder senkrecht auf ihr steht. Anderenfalls spiegeln wir die Punkte A und B an g . Die Bildpunkte seien A' und B' . Da g nicht senkrecht auf $\overline{AB}$ steht, haben $\overline{AB}$ und $\overline{A'B'}$ lediglich einen Punkt auf g gemeinsam. Die Geraden AB' und $A'B$ sind nicht parallel zu g , denn sonst würde der Strahlensatz implizieren, dass g durch den Mittelpunkt von $\overline{AB}$ geht. Die Spiegelbilder AB' und $A'B$ schneiden daher g in genau einem Punkt C . Zudem schneiden sie g im gleichen Winkel, sodass g die Winkelhalbierende des Dreiecks $\triangle ABC$ ist.

Ist umgekehrt g die Winkelhalbierende des Dreiecks $\triangle ABC$, so gehen die Geraden AC und BC durch Spiegelung an g ineinander über. Insbesondere muss B' auf AC und A' auf BC liegen, sodass C eindeutig durch obige Konstruktion entsteht.

Bepunktungsvorschlag:

- jeweils 1 Punkt für die korrekte Benennung und Begründung der beiden Fälle, in denen C nicht eindeutig ist: g halbiert $\overline{AB}$ oder steht senkrecht auf $\overline{AB}$
- 1 Punkt für die Angabe der Konstruktion
- 1 Punkt für den Nachweis der Korrektheit und Eindeutigkeit

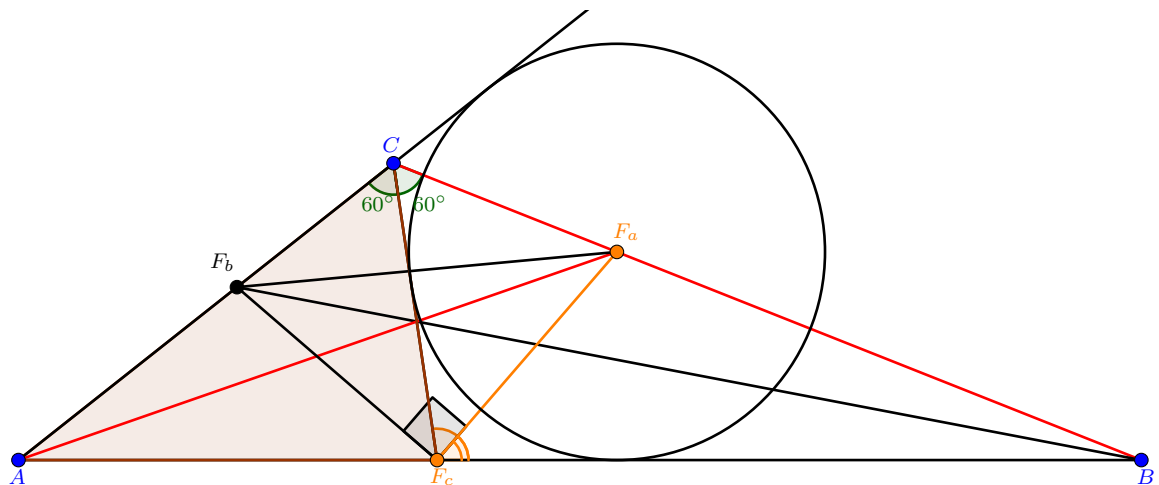


Abbildung 1: Lösungsskizze für Teil (b)

- (b) **(3 Punkte)** Wegen $|\angle ACF_c| = |\angle F_cCB| = 60^\circ = (180^\circ - 60^\circ)/2$ ist die Gerade CB Außenwinkelhalbierende des Dreiecks $\triangle AF_cC$ und CA ist eine Außenwinkelhalbierende von $\triangle F_cBC$. Da sich die Innenwinkelhalbierende mit den Außenwinkelhalbierenden der anderen beiden Punkte im Ankreismittelpunkt trifft, sind daher F_cF_a und F_cF_b die Außenwinkelhalbierenden von $\angle CF_cA$ beziehungsweise $\angle BF_cC$ und damit die Winkelhalbierenden von $\angle BF_cC$ beziehungsweise $\angle CF_cA$. Insbesondere ist

$$|\angle F_aF_cF_b| = |\angle F_aF_cC| + |\angle CF_cF_b| = \frac{1}{2} (|\angle BF_cC| + |\angle CF_cA|) = \frac{1}{2} |\angle BF_cA| = 90^\circ.$$

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für die Angabe $|\angle F_a F_c F_b| = 90^\circ$
- 1 Punkt für die Beobachtung, dass CB oder CA eine Außenwinkelhalbierende eines Dreiecks ist
- 1 Punkt für den richtigen Abschluss des Beweises

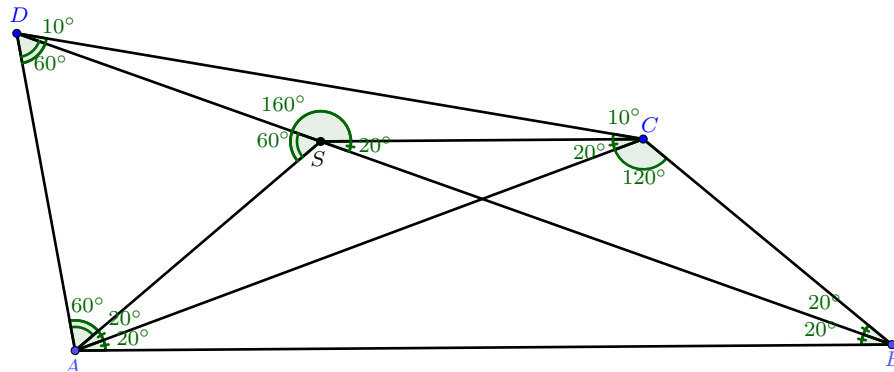


Abbildung 2: Lösungsskizze für Teil (c)

- (c) **(3 Punkte)** Wegen $|\angle CAD| = 80^\circ = (180^\circ - 20^\circ)/2 = (180^\circ - |\angle BAC|)/2$ ist AD eine Außenwinkelhalbierende des Dreiecks $\triangle ABC$. Nach Voraussetzung ist BD eine Innenwinkelhalbierende, sodass CD wiederum Außenwinkelhalbierende des Dreiecks $\triangle ABC$ sein muss. Wegen

$$|\angle ACB| = 180^\circ - |\angle BAC| - |\angle CBA| = 180^\circ - 20^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 120^\circ$$

folgt daher $|\angle DCA| = (180^\circ - 120^\circ)/2 = 30^\circ$. Schließlich erhalten wir

$$|\angle BDC| = 180^\circ - |\angle CBD| - |\angle ACB| - |\angle DCA| = 180^\circ - 20^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 10^\circ.$$

Eine Alternative, die ohne Erkennen der Außenwinkelhalbierenden auskommt, ist die folgende: Wir konstruieren den Punkt S auf BD durch die Bedingung $|\angle CAS| = 20^\circ$. Dann $|\angle SAD| = |\angle CAD| - |\angle CAS| = 80^\circ - 20^\circ = 60^\circ$. Ebenso $|\angle DSA| = 180^\circ - |\angle ASB| = |\angle SBA| + |\angle BAC| + |\angle CAS| = 20^\circ + 20^\circ + 20^\circ = 60^\circ$. Damit ist $\triangle ASD$ gleichseitig. Weiterhin ist das Viereck $\square ABCS$ wegen $|\angle CAS| = 20^\circ = |\angle CBS|$ ein Sehnenviereck, woraus $|\angle SCA| = |\angle SBA| = 20^\circ$ folgt. Daher ist $\triangle ACS$ gleichschenkelig, sodass $|\overline{DS}| = |\overline{AS}| = |\overline{CS}|$ und $\triangle CDS$ gleichschenkelig ist. Damit $2|\angle BDC| = 2|\angle DCS| = 180^\circ - |\angle CSD| = |\angle BSC| = |\angle BAC| = 20^\circ$.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für die Angabe $|\angle BDC| = 10^\circ$
- 1 Punkt für die Idee, AD als Außenwinkelhalbierende aufzufassen, oder die Konstruktion des Punktes S wie in der zweiten Lösungsvariante
- 1 Punkt für den korrekten Abschluss des Beweises

Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE
----------------	---------------------	---------------

Aufgabe 3: Brunnen in der Wasserstadt

(Aufgabe (a): 2 Punkte, (b): 3 Punkte, (c): 2 Punkte, (d): 3 Punkte)

In der Wasserstadt gibt es n Brunnen $b_1, \dots, b_n$. Ein jeder von ihnen ist unendlich tief und beinhaltet entsprechend unendlich viel Wasser. Dennoch kann von jedem Brunnen ein Füllstand angegeben werden: Dieser ist als Abweichung in Litern von einem Normwert zu verstehen. Die Füllstände in Litern seien durch die ganzen Zahlen $f_1, \dots, f_n$ beschrieben. Insbesondere kann ein Füllstand f_i negativ sein, wenn die Wasserhöhe des Brunnens b_i nicht den Normwert erreicht.

Die Brunnen der Wasserstadt sind mittels Rohrleitungen kreisförmig angeordnet, sodass der Brunnen b_i genau mit den beiden Brunnen $b_{i\pm 1}$ verbunden ist (wobei $b_{n+1} := b_1$ und $b_0 := b_n$ gesetzt wird). An jedem Brunnen befindet sich eine Pumpe, die bei Betätigung jeweils einen Liter an die beiden benachbarten Brunnen pumpt. Wird die Pumpe an b_i betätigt, so sinkt also der Füllstand f_i um zwei und der Füllstand $f_{i\pm 1}$ von $b_{i\pm 1}$ steigt um jeweils eins.

Die Bewohnerinnen von Wasserstadt streben nach Harmonie und möchten daher durch endlich viele Pumpvorgänge den Füllstand eines jeden Brunnens auf mindestens 0 bringen, also $f_i \geq 0$ für alle i . Eine solche Konfiguration bezeichnen wir als *Normzustand*. Die Frage ist nun, unter welchen Voraussetzungen dieser erreichbar ist.

- (a) Es sei $n = 3$. Entscheidet für jedes der vier folgenden Tripel von Füllständen, ob von diesen ausgehend ein Normzustand erreicht werden kann. Eine Begründung ist hier nicht nötig, es genügt die Angabe ja oder nein.
 - (1) $f_1 = -3, f_2 = 4, f_3 = -2$
 - (2) $f_1 = 1, f_2 = -5, f_3 = 4$
 - (3) $f_1 = 1, f_2 = -3, f_3 = 2$
 - (4) $f_1 = 2, f_2 = 2, f_3 = -3$
- (b) Gebt nun für $n = 3$ alle ganzzahligen Füllstände an, für die es eine Abfolge von Pumpvorgängen in einen Normzustand gibt. Beschreibt insbesondere für jedes solche Tripel an Füllständen eine entsprechende Folge an Pumpvorgängen und beweist für alle anderen Tripel, dass es eine solche Abfolge nicht geben kann.
- (c) Es sei $n > 3$. Zu Beginn gelte $f_1 + f_2 + \dots + f_n > 0$. Beweist, dass eine Abfolge von Pumpvorgängen in einen Normzustand existiert.
- (d) Beschreibt für alle $n > 3$ Tupel von Füllständen mit $f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0$, für die es keine endliche Abfolge von Pumpvorgängen in einen Normzustand geben kann, und beweist dies.

Platz für die Lösung:

[illegible]

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

- (a) **(2 Punkte)** Für das erste und das dritte Tripel ist es nicht möglich, für das zweite und vierte hingegen ist es möglich.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für zwei richtige Angaben
- 1 Punkt für weitere zwei richtige Zuordnungen

- (b) **(3 Punkte)** In jedem Pumpvorgang bleibt die Summe aller Füllstände konstant. Insbesondere kann es keine Lösung geben, wenn zu Beginn $f_1 + f_2 + f_3 < 0$ gilt.

Wir beobachten, dass sich in jedem Pumpvorgang die Reste der Füllstände bei Division durch 3 jeweils um 1 ändern, da die Differenz von $+1$ und -2 genau 3 ist. Wenn zu Beginn $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ gilt, so ist $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ der einzig mögliche Normzustand. Daher kann nur dann eine Lösung existieren, wenn die Reste von f_1, f_2, f_3 bei Division durch 3 zu Beginn gleich waren.

Wir zeigen nun, dass es in diesem Fall tatsächlich eine Abfolge von Pumpvorgängen in den Normzustand $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ gibt. Dazu betätigen wir die Pumpe von b_i , sofern $f_i \geq 2$ ist. In diesem Fall muss ein negativer Füllstand f_j vorhanden sein, der nach dem Pumpvorgang betragsmäßig kleiner wird. Daher haben wir nach endlich vielen Pumpvorgängen die Situation erreicht, dass $f_i \leq 1$ für alle i gilt. Sind nun zwei Füllstände gleich 1, so betätigen wir die Pumpen dieser Brunnen und erreichen bei diesen Brunnen den Normwert und wegen $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ auch beim dritten. Ist kein Füllstand gleich 1, so müssen alle Füllstände dem Normwert entsprechen. Da die Reste von f_1, f_2, f_3 bei Division durch 3 stets gleich sind, kann es nicht sein, dass am Ende genau ein Füllstand 1 ist (und die anderen beiden damit 0 und -1 sind).

Im Fall $f_1 + f_2 + f_3 > 0$ führt das obige Vorgehen stets zu einem Normzustand: Wenn am Ende genau ein Füllstand 1 ist, so müssen die anderen beiden zumindest dem Normwert entsprechen.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für die Beobachtung, dass die Gesamtfüllmenge konstant bleibt und daher die Gesamtfüllmenge zu Beginn nichtnegativ sein muss
- 1 Punkt für den Fall $f_1 + f_2 + f_3 > 0$
- 1 Punkt für den Fall $f_1 + f_2 + f_3 = 0$
- Stimmen die Behauptungen für beide Fälle, aber die Beweise fehlen oder sind unvollständig, so kann dennoch ein Punkt vergeben werden. Allein die Angabe, dass es für $f_1 + f_2 + f_3 < 0$ nie, für $f_1 + f_2 + f_3 > 0$ immer und für $f_1 + f_2 + f_3 = 0$ nur manchmal geht, gibt jedoch keine Punkte.

- (c) **(2 Punkte)** Es bezeichne $\lfloor n/2 \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner oder gleich $n/2$ ist, und es bezeichne $\lceil n/2 \rceil$ die kleinste ganze Zahl, die größer oder gleich $n/2$ ist (wir runden $n/2$ also ab beziehungsweise auf). Zunächst wollen wir erreichen, dass $f_{1+\lfloor n/2 \rfloor}$ und $f_{1+\lceil n/2 \rceil}$ nichtnegativ sind (wenn n gerade ist, ist dies nur ein Füllstand). Dazu betätigen wir die Pumpen bei $b_{\lfloor n/2 \rfloor}$ und $b_{2+\lceil n/2 \rceil}$ entsprechend oft. Nun sollen $f_{\lfloor n/2 \rfloor}$ und $f_{2+\lceil n/2 \rceil}$ nichtnegativ werden, was wir durch entsprechende Pumpvorgänge bei $b_{-1+\lfloor n/2 \rfloor}$ und $b_{3+\lceil n/2 \rceil}$ erreichen. Wiederholen wir diesen Vorgang bis zu den Füllständen f_2 und f_n , so können wir $f_2, \dots, f_n \geq 0$ erreichen.

Jedes Mal, wenn ein Füllstand $f_i \geq 2$ mit $i \neq 1$ erfüllt, betätigen wir die Pumpe b_i . Finden wir $1 < i < j \leq n$ mit $f_i = f_j = 1$, so betätigen wir die Pumpen aller Brunnen b_k mit $i \leq k \leq j$. f_k mit $i < k < j$ bleibt dann konstant, f_i und f_j sinken um 1. In beiden Fällen bleiben also $f_2, \dots, f_n \geq 0$. Allerdings gibt es zumindest einen Liter Wasser, der bei diesem Vorgang näher an b_i gelangt (wobei wir die Abstände auf dem diskreten Kreis $1, \dots, n$ betrachten). Daher können wir diese Pumpvorgänge nur endlich oft durchführen. Ist keiner mehr von diesen möglich, so gilt $f_2 + \dots + f_n \leq 1$. Insbesondere $f_1 \geq 0$.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für den Weg zu der Situation, alle Füllstände bis auf womöglich einen nichtnegativ zu machen
- 1 Punkt für den Nachweis, dass im Anschluss alle Füllstände nichtnegativ gemacht werden können
- Alternative Lösungswege sollen mit zwei Punkten bepunktet werden, wenn sie korrekt sind, und mit einem Punkt, wenn sie nicht vollständig sind, aber zielführend erscheinen.

- (d) **(3 Punkte)** Das Vorgehen im Aufgabenteil (c) führt im Fall $f_1 + f_2 + \dots + f_n = 0$ genau dann nicht zum Erfolg, wenn am Ende $f_i = 1$ für genau ein $i \neq 1$ gilt. Wir bezeichnen diese Konfiguration mit K_1 und wollen zeigen, dass diese niemals in den Normzustand K_0 ($f_i = 0$ für alle i) überführt werden kann. K_0 und K_1 erfüllen beide die Eigenschaften $f_2, \dots, f_n \geq 0$ und $f_2 + \dots + f_n \leq 1$.

Wir beobachten zunächst, dass Pumpvorgänge reversibel sind: Wird die Pumpe von b_i betätigt und im Anschluss alle Pumpen von b_j mit $j \neq i$, so haben wir dieselben Füllstände wie zu Beginn. Insbesondere können wir genau dann K_1 in K_0 überführen, wenn wir K_0 in K_1 überführen können.

Angenommen, wir könnten K_1 in K_0 überführen. Sei B die Menge der Indizes jener Brunnen, deren Pumpe wir auf dem Weg von K_1 nach K_0 am häufigsten betätigt haben. Offenbar $B \neq \{1, \dots, n\}$, da sonst jede Pumpe gleich oft betätigt werden würde und $K_1 = K_0$ wäre. Zudem können wir annehmen, dass $1 \notin B$. Anderenfalls vertauschen wir im Folgenden die Rollen von K_1 und K_0 : Aus einem Brunnen, dessen Pumpe am häufigsten betätigt wurde, wird dann ein Brunnen, dessen Pumpe am seltensten betätigt wurde.

Es sei $B = \{i_1, \dots, i_k\}$. Betätigen wir nun ausgehend von K_1 die Pumpen aller Brunnen $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$, so bleibt $f_2, \dots, f_n \geq 0$. Denn im Anschluss verliert jeder Brunnen b_i mit $i \in B$ mindestens so viel Wasser, wie er von anderen Brunnen zurück bekommt, und die Konfiguration K_0 erfüllt die Eigenschaft $f_2, \dots, f_n \geq 0$. Daraus folgt, dass die Füllstände der Brunnen b_i mit $i \in B$ in der Konfiguration K_1 in der Summe zumindest zwei Liter Wasser mehr als den Normwert aufweisen müssen, damit nach ihrem Betätigen ihre Füllstände nicht negativ werden. Für die Füllstände von K_1 erhalten wir damit den Widerspruch

$$1 \geq f_2 + \dots + f_n \geq f_{i_1} + \dots + f_{i_k} \geq 2.$$

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für die Angabe eines Beispiels, aus dem auf den ersten Blick ersichtlich wird, dass es durch Pumpvorgänge aus der Musterlösung erreicht werden kann (oder für welches es einen korrekten Nachweis gibt)

- *2 Punkte für den Beweis: Das Erkennen der Reversibilität kann schon mit einem Punkt belohnt werden, ebenso soll ein plausibler und zielführender Ansatz mit einem Punkt bepunktet werden*

Schule:	Team-Nummer:	PUNKTE
---------	--------------	--------

Aufgabe 4: Gefärbte Zahlen

(Aufgabe (a): 3 Punkte, (b): 3 Punkte, (c): 4 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus drei voneinander unabhängigen Teilen. Wir betrachten im Folgenden jedoch stets die positiven ganzen Zahlen $\mathbb{Z}_+$, von denen eine jede entweder schwarz oder weiß gefärbt sei.

- (a) Zeigt, dass es drei paarweise verschiedene, aber gleichfarbige Zahlen gibt, von denen eine das arithmetische Mittel der anderen beiden ist. Das heißt, es gibt positive ganze Zahlen $x < y < z$ derselben Farbe mit $y = (x + z)/2$.

- (b) Bestimmt alle Funktionen $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$, die $f(1) = 1$ und die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y) + xy(x + y)$$

für alle $x, y \in \mathbb{Z}_+$ erfüllen. Begründet auch, weswegen es keine weiteren gibt.

- (c) Gegeben sei eine monoton wachsende Funktion $f : \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{Z}_+$, die die Funktionalgleichung

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

für alle gleichfarbigen positiven ganzen Zahlen x, y und $x + y$ erfüllt. Beweist, dass es eine positive ganze Zahl C gibt, sodass $f(x) \leq Cx$ für alle $x \in \mathbb{Z}_+$ gilt.

Platz für die Lösung:



- (a) **(3 Punkte)** Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, es gäbe keine drei solcher Zahlen. Wir nehmen zwei gleichfarbige Zahlen x und $z = x + 2\delta$, sagen wir schwarzer Farbe. Ihr Mittelpunkt $x + \delta$ ist dann weiß. Selbiges gilt aber auch für $x - 2\delta$ und $x + 4\delta$. Der Mittelpunkt dieser zwei weißen Zahlen ist aber $x + \delta$ und damit weiß, Widerspruch. Für positive ganze Zahlen müssen wir diese Grundidee adaptieren und sicherstellen, dass alle Zahlen positiv und ganzzahlig sind. Wir stellen zwei Lösungsvarianten vor.

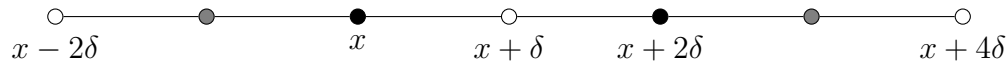


Abbildung 3: Skizze zur ersten Lösungsidee

Die erste Idee ist, x und z genügend groß zu wählen, sodass $x - 2\delta > 0$ gilt. Dazu betrachten wir unter den geraden Zahlen größer 3 zwei aufeinanderfolgende gleicher Farbe (sofern existent). Dann $x \geq 4$ und $\delta = 1$, sodass die obige Argumentation zum Ziel führt. Gibt es keine zwei aufeinanderfolgende gerade Zahlen gleicher Farbe, so müssen sie abwechselnd gefärbt sein, sodass wir gerade Zahlen $x \geq 6$ und $z = x + 4$ gleicher Farbe finden. Dann ist $\delta = 2$ und das obige Argument führt erneut zum Ziel.

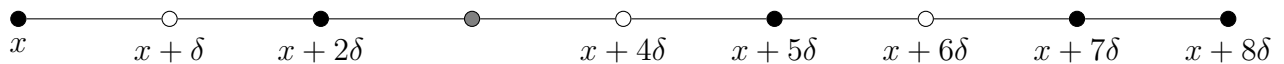


Abbildung 4: Skizze zur zweiten Lösungsidee

Eine andere Idee ist, $z - x$ so zu wählen, dass es durch eine genügend große Zweierpotenz teilbar ist und wir das Intervall zwischen x und z geeignet unterteilen können. Unter den durch 8 teilbaren Zahlen betrachten wir $x < z$ derselben Farbe, sagen wir schwarzer Farbe. Sei $8\delta := z - x$. Dann ist $(x+z)/2 = x + 4\delta$ weiß. Von $x + 2\delta$ und $x + 6\delta$ muss dann zumindest eine Zahl schwarz sein. Ohne Einschränkung können wir annehmen, dass $x + 2\delta$ schwarz ist, ansonsten spiegeln wir die nachfolgenden Argumente an $(x+z)/2$. Da x und $x + 2\delta$ schwarz sind, so muss $x + \delta$ weiß sein. Da $x + 4\delta$ weiß ist, so muss $x + 7\delta$ schwarz sein, wie es auch $z = x + 8\delta$ ist. Ergo ist $x + 6\delta$ genauso wie $x + 4\delta$ weiß. Dann muss $x + 5\delta$ schwarz sein. Da dies auch $x + 2\delta$ und $x + 8\delta$ sind, erhalten wir einen Widerspruch.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für eine Konstruktion, die die Ganzzahligkeit berücksichtigt
- 2 Punkte für die Positivität: Von diesen zwei Punkten kann ein Punkt bereits für die Idee gegeben werden, x und z genügend groß zu wählen (ohne, dass $z - x$ dabei zu groß wird), oder für den Ansatz, das Intervall zwischen x und z geeignet zu unterteilen.

- (b) **(3 Punkte)** Die Ähnlichkeit zum Ausdruck $(x+y)^3 = x^3 + 3xy(x+y) + y^3$ motiviert uns dazu, $g(x) := f(x) - x^3/3$ zu betrachten. Aus der Funktionalgleichung ergibt sich dann

$$g(x+y) = f(x+y) - \frac{1}{3}(x+y)^3 = f(x) + f(y) + xy(x+y) - \frac{1}{3}(x^3 + y^3) - xy(x+y) = g(x) + g(y).$$

Zudem ist $g(1) = 2/3$. Wiederholte Anwendung der Funktionalgleichung für g liefert $g(x) = 2x/3$. Daher ist $f(x) = (x^3 + 2x)/3 = x(x^2 + 2)/3$ eindeutig bestimmt und liefert positive Werte. Nach Konstruktion erfüllt f die Funktionalgleichung und $f(1) = 1$. Die Ganzzahligkeit folgt aus der Beobachtung, dass x^2 bei Division durch 3 stets den Rest 1 lässt, wenn x nicht durch 3 teilbar ist.

Übrigens folgt die Ganzzahligkeit bereits aus der Funktionalgleichung: Setzen wir $x = n$ und $y = 1$ ein, so erhalten wir $f(n + 1) = f(n) + f(1) + n(n + 1)$ eindeutig aus $f(n)$ erhalten. Induktiv erhalten wir damit die Eindeutigkeit und Ganzzahligkeit einer jeden Lösung, die die Funktionalgleichung erfüllt.

Bepunktungsvorschlag:

- 1 Punkt für den Nachweis von Eindeutigkeit und Ganzzahligkeit einer Lösung (selbst, wenn die korrekte Funktion nicht herausgefunden wurde)
- 2 Punkte für die korrekte Angabe der Funktion f samt Nachweis, dass f die Funktionalgleichung erfüllt: Es kann dabei ein Punkt für die Idee vergeben werden, x^3 in geeigneter Form zu betrachten.

- (c) **(4 Punkte)** Wir betrachten zunächst den Fall, dass es unbeschränkt lange Intervalle aufeinanderfolgender Zahlen gleicher Farbe gibt, sagen wir schwarzer Zahlen. Dann gibt es für $f(x)/x$ für schwarze $x \in \mathbb{Z}_+$ nur einen Wert: Seien $x \neq y$ schwarz. Wir wählen nun für $k = xy$ ein Intervall $[n, n + k]$ von $k + 1$ aufeinanderfolgenden schwarzen Zahlen. Wiederholte Anwendung der Funktionalgleichung liefert dann $f(n) + xf(y) = f(n + k) = f(n) + yf(x)$, sodass $f(x)/x = f(y)/y$ gilt. Runden wir diesen Wert auf und nennen ihn C_s , so gilt $f(x) \leq C_s x$ für alle schwarzen Zahlen x .

Gibt es auch unbeschränkt lange Intervalle aufeinanderfolgender weißer Zahlen, so können wir dasselbe Argument für weiße Zahlen anwenden und erhalten eine positive ganze Zahl C_w mit $f(x) \leq C_w x$ für alle weißen Zahlen x . $C := \max\{C_s, C_w\}$ erfüllt dann $f(x) \leq Cx$ für alle $x \in \mathbb{Z}_+$. Ist die Länge aufeinanderfolgender weißer Zahlen hingegen durch k beschränkt, so gibt es für eine weiße Zahl $x \geq k$ eine schwarze Zahl $y \leq x + k$. Wegen der Monotonie gilt $f(x) \leq f(y) \leq C_s y \leq C_s(x + k) \leq 2C_s x$. Bezeichnet C'_w den größten aufgerundeten Wert von $f(x)/x$ für weiße Zahlen $x < k$, so erfüllt die Konstante $C := \max\{2C_s, C'_w\}$ die Ungleichung $f(x) \leq Cx$ für alle $x \in \mathbb{Z}_+$.

Es verbleibt folglich der Fall, dass die Länge von Intervallen aufeinanderfolgender gleichfarbiger Zahlen beschränkt ist, sagen wir durch k . Sei $C = f(3k)$. Wegen der Monotonie gilt $f(x) \leq C \leq Cx$ für alle $1 \leq x \leq 3k$. Wir behaupten, dass sogar $f(x) \leq Cx$ für alle $x \in \mathbb{Z}_+$ gilt. Dazu zeigen wir, dass das Inkrement $f(x + 1) - f(x)$ nie größer als C ist.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, $f(x + 1) - f(x) > C$ für ein $x > 3k$. Wir wählen die kleinste solche Zahl x . Insbesondere gilt $f(y) \leq Cy$ für alle $y < x$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x weiß. Wir schauen uns den letzten Farbwechsel von schwarz auf weiß bevor x an: Sei $x - m$ schwarz ($m > 0$), aber $x - m + 1, \dots, x$ seien alle weiß. Nun suchen wir den ersten Farbwechsel von weiß auf schwarz nach m : Sei $n > m$ die kleinste Zahl, sodass n schwarz und $n - 1$ weiß ist. Nach Voraussetzung gilt $m \leq k$ und $n \leq m + 2k \leq 3k$. Nun ist $(x - m + n) = (x - m) + n = (x - m + 1) + (n - 1)$ sowohl die Summe zweier schwarzer als auch zweier weißer Zahlen. Damit gilt, je nachdem ob $x - m + n$ schwarz oder weiß ist,

$$f(x - m + n) = f(x - m) + f(n) \text{ oder } f(x - m + n) = f(x - m + 1) + f(n - 1).$$

Nun sind sowohl $f(n)$ als auch $f(n - 1)$ nicht größer als C , sodass aus der Monotonie

$$\begin{aligned} f(x + 1) - f(x) &\leq f(x - m + n) - f(x - m) = f(n) \leq C \\ \text{oder } f(x + 1) - f(x) &\leq f(x - m + n) - f(x - m + 1) = f(n - 1) \leq C \end{aligned}$$

folgt, Widerspruch.

Bepunktungsvorschlag:

- 2 Punkte für den Fall unbeschränkt langer Intervalle gleichfarbiger Zahlen: einen für die Idee, einen für die korrekte Umsetzung
- 1 Punkt für die Idee, das Inkrement $f(x+1) - f(x)$ zu betrachten und zu zeigen, dass dieses nicht größer als C ist (nur dann, wenn auch ein nachvollziehbarer Ansatz erkennbar ist, wie dies gezeigt werden soll)
- 1 Punkt für den Abschluss des Beweises