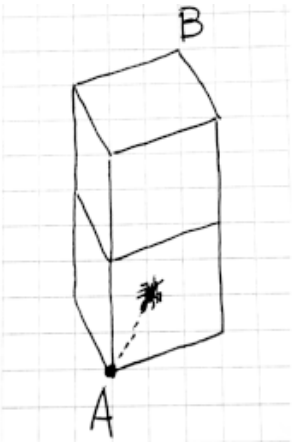
Aufgabe 1: Von A(meise) bis B(orkenkäfer)

(Aufgabe (a): 6 Punkte, (b): 3 Punkte, (c): 1 Punkt)

Eine Ameise und ein Borkenkäfer befinden sich am Punkt A eines Holzquaders mit den Abmessungen $B \times H \times T = \ell \times 2\ell \times \ell$ für ein $\ell > 0$. Beide Insekten wollen die gegenüberliegende Ecke B erreichen.

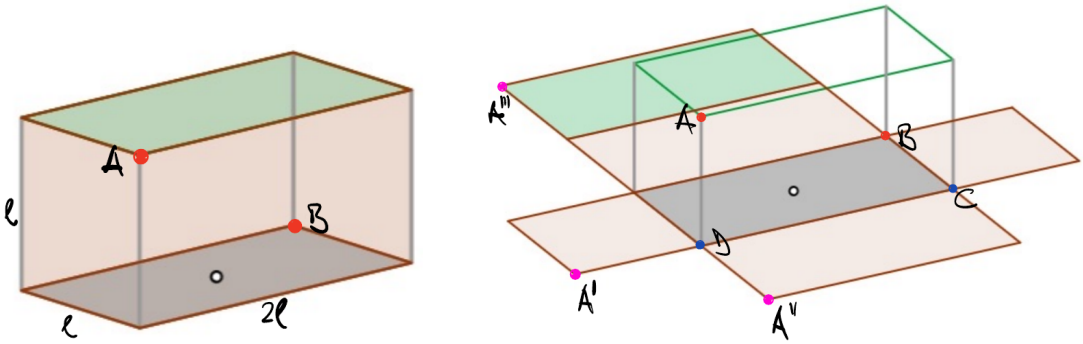


(a) Die Ameise kann sich nur auf der Oberfläche des Quaders bewegen. Welchen Weg muss sie nehmen, wenn sie den kürzesten Weg nimmt, und wie lang ist dieser Weg? Über welche Kante muss die Ameise gehen und an welcher Stelle wird sie gekreuzt?

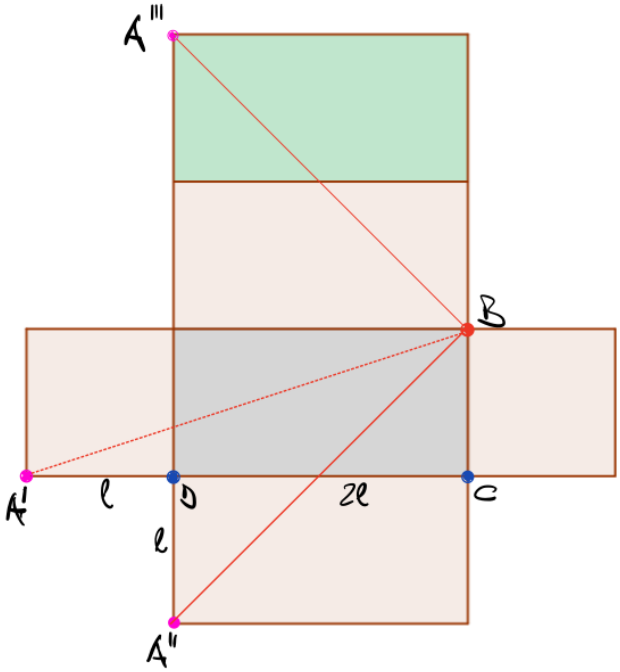
(b) Der Borkenkäfer nimmt den kürzesten Weg, indem er sich durchs Holz frisst. Wie lang ist sein Weg?

(c) Welches Insekt hat den kürzeren Weg?

Lösung: Wir legen den Quader in Gedanken auf eine der rechteckigen Seiten und falten ihn zum Beispiel fogendermaßen auf:



(a) **(6 Punkte)** Im Quadernetz, das durch das Auffalten entsteht, entspricht der Eckpunkt A den drei Punkten A', A'' bzw. A'''. Das sieht dann so aus:



Die kürzeste Verbindung zwischen A' bzw. A'' bzw. A''' und B ist jeweils die Strecke, die die Punkte miteinander verbindet; alle anderen Wege über die kurze bzw. lange Kante der beigen Seitenfläche sind länger als die gestrichelte bzw. die beiden durchgezogenen roten Strecken und scheiden damit von vornherein aus. Die Strecken entsprechen den möglichen Wegen, die die Ameise über die 2 langen bzw. die lange und die kurze Seite nehmen kann.

Aus Symmetriegründen könnte die Ameise auch erst über die quadratische und dann über die rechteckige Seite laufen, anstatt zuert über die rechteckige und dann über die quadratische. Dazu müsste man den Quader anders auffalten, der zurückgelegte Weg bleibt aber derselbe. Die Strecke von A''' zu B ist genauso lang wie die von A'' zu B, daher wird A''' im Folgenden nicht weiter berücksichtigt.

Mit dem Satz des Pythagoras lässt sich die Länge der beiden Strecken leicht berechnen:

$$\overline{A'B} = \sqrt{(3\ell)^2 + \ell^2} = \ell\sqrt{10}\,, \quad \overline{A''B} = \sqrt{(2\ell)^2 + (2\ell)^2} = \ell\sqrt{8}\,.$$

Die Verbindung über die längere Kante mit der Gesamtlänge $\ell\sqrt{8}$ ist kürzer und da die gerade Linie unter allen Wegen von B zu A'' optimal ist, ist dies der kürzeste Weg für die Ameise; die Ameise überquert die lange Kante genau in der Kantenmitte, denn $\overline{A''B}$ (bzw. $\overline{A'''B}$) ist die Diagonale eines Quadrats mit Kantenlänge 2ℓ.

Bepunktungsvorschlag

- *2 Punkte für die Idee, den Quader geeignet aufzufalten (oder einen anderen zielführenden Ansatz)*
- *insgesamt 3 Punkte für die Berechnung der Längen der beiden Strecken und die Erkenntnis, dass nur eine Strecke infrage kommt*
- *1 Punkt für die genaue Beschreibung des Wegs über die Kante*

(b) **(3 Punkte)** Gesucht ist die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle ADC$. Dafür wenden wir den Satz des Pythagoras zweimal an und erhalten:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{DC}^2 + \overline{CB}^2 = \ell^2 + (2\ell)^2 + \ell^2\,.$$

Im zweiten Schritt haben wir ausgenutzt, dass die Strecke $\overline{DB}$ die Hypothenuse des rechtwinkligen Dreiecks $\triangle DCB$ ist. Insgesamt erhalten wir also

$$\overline{AB} = \ell\sqrt{6}\,.$$

Bepunktungsvorschlag

- *1 Punkt für die Identifikation bzw. Beschreibung der Diagonalen*
- *2 Punkte für die Längenberechnung*

(c) **(1 Punkt)** Nach (a) und (b) gilt $\overline{A''B} = \overline{AB}\sqrt{4/3}$, aber auch ohne Rechnung ist klar: Die gerade Linie ist im dreidimensionalen Euklidischen Raum immer die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Der Borkenkäfer hat also den kürzeren Weg.

Bepunktungsvorschlag

- *1 Punkt mit oder ohne Rechnung*

Aufgabe 2: Wir brauchen gute Produkte!

(Aufgabe (a): 3 Punkte, (b): 7 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei voneinander unabhängigen Teilen.

(a) Die Zahl 2023 lässt sich als Produkt dreier natürlicher Zahlen darstellen. Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Zahl 2023 als Produkt dreier natürlicher Zahlen zu schreiben, wobei Darstellungen, die sich durch das Vertauschen von Faktoren ergeben, nicht mehrfach gezählt werden?

(b) Die Zahl $20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$ ist das Produkt der ersten 20 natürlichen Zahlen. My-Linh hat die Zahl, die im Dezimalsystem 19 Stellen hat, ausgerechnet und auf einen Zettel geschrieben. Leider ist der Zettel nass geworden und so ist nur noch der unleserliche Ausdruck

$$20! = 24329020\square 81766\square\square\square\square\square$$

übrig geblieben. Findet die fehlenden Ziffern! (Dazu muss die Zahl nicht erneut ausgerechnet werden.)

Lösung: In beiden Fällen ist eine Primfaktorenzerlegung der naheliegende erste Schritt.

(a) **(3 Punkte)** Durch systematisches Ausprobieren findet man leicht raus, dass $2023 = 7 \cdot 17^2$. Da auch 1 eine natürliche Zahl ist, aber Permutationen nicht berücksichtigt werden, erhalten wir insgesamt 4 Darstellungen mit je 3 Faktoren:

$$7 \cdot 17 \cdot 17\,, \quad 1 \cdot 7 \cdot 289\,, \quad 1 \cdot 17 \cdot 119\,, \quad 1 \cdot 1 \cdot 2023\,.$$

Bepunktungsvorschlag

- *1 Punkt für die Primfaktorenzerlegung*
- *1 Punkt für die Idee des Ausmultiplizierens*
- *1 Punkt fürs Hinschreiben aller 4 Möglichkeiten*

(b) **(7 Punkte)** Die Lösung besteht in der Anwendung geeigneter Teilbarkeitsregeln; zunächst macht man sich klar, dass 20! sich wie folgt in Primfaktoren zerlegen lässt:

$$20! = 2^{18} \cdot 3^8 \cdot 5^4 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19$$

(Das geht ganz leicht über die Primfaktorenzerlegung der Faktoren in $1 \cdot 2 \cdots 19 \cdot 20$.)

- Indem wir die Zweier- und Fünferpotenzen zusammenfassen, sehen wir, dass die letzten 4 Ziffern 0 sein müssen, denn

$$20! = 10^4 \cdot \left(2^{14} \cdot 3^8 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19\right).$$

- Die fünftletzte Ziffer ist die letzte Ziffer des Produkts in Klammern; es reicht, jeweils die Einerziffern auszumultiplizieren: $17 \cdot 19$ hat die Endziffer 3 (denn $7 \cdot 9 = 63$), multipliziert mit 13 ergibt sich die Endziffer 9; das Ganze mal 11 liefert die Endziffer 9; der Faktor $7^2 = 49$ führt zur Endziffer 1, der Faktor $3^8 = 3^4 \cdot 3^4 = 81 \cdot 81$ ergibt die Endziffer 1, der Faktor $2^{14} = 2^7 \cdot 2^7 = 128 \cdot 128$ schließlich die Endziffer 4 (denn $8 \cdot 8 = 64$). Damit ist

$$20! = 24329020\square 8176640000.$$

- Die fehlende Ziffer können wir durch die alternierende Quersumme bestimmen, die berechnet wird, indem die einzelnen Ziffern von rechts nach links abwechselnd addiert und subtrahiert werden. (Beispielsweise hat 85976 die alternierende Quersumme $6 - 7 + 9 - 5 + 8 = 11$.) Die Zahl 20! enthält die 11, die alternierende Quersumme muss also durch 11 teilbar sein. Wenn wir die fehlende Ziffer mit a bezeichnen, so ist die alternierende Quersumme von 20!

  $$0 - 0 + 0 - 0 + 4 - 6 + 6 - 7 + 1 - 8 + a - 0 + 2 - 0 + 9 - 2 + 3 - 4 + 2 = a\,.$$

  Die einzige Ziffer a, die durch 11 teilbar ist, ist $a = 0$, also:

  $$20! = 2432902008176640000\,.$$

- Man könnte auf die Idee kommen, beim Bestimmen der letzten fehlenden Ziffer mit der gewöhnlichen Quersumme und der Teilbarkeit durch 9 zu argumentieren; damit lässt sich die fehlende Ziffer aber nicht bestimmen, denn die Quersumme ohne die fehlende Ziffer ist gerade 9; es gäbe also zwei Möglichkeiten für a.

Bemerkung zur Teilbarkeit durch 11

Da alle geraden Potenzen von 10, also 100, 10000 usw. beim Teilen durch 11 den Rest 1 haben, alle ungeraden Zehnerpotenzen (also 10, 1000 usw.) den Rest -1, hat die alternierende Quersumme beim Teilen durch 11 denselben Rest wie die Zahl selbst. Eine Zahl ist also durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist; die Zahl 85976 ist folglich durch 11 teilbar. Da die Dezimaldarstellung einer Zahl eindeutig ist, gilt auch die Umkehrung; eine Zahl ist also genau dann durch 11 teilbar, wenn ihre alternierende Quersumme durch 11 teilbar ist.

Bepunktungsvorschlag

- *2 Punkte für das korrekte Zusammenfassen der Zweier- und Fünferpotenzen zu Zehnerpotenzen*
- *1 Punkt für die viertletzte Ziffer*
- *je 1 Punkt für die Erkenntnis, dass das Ausmultiplieren der Klammer die fünftletzte Ziffer ergibt, und die Angabe der fünftletzten Ziffer.*
- *2 Punkte für den Trick mit der alternierenden Quersumme und der Teilbarkeit durch 11; falls ein Team mit Teilbarkeit durch 9 argumentieren kann, weil es sich beim Bilden der Quersumme verrechnet hat, sollte nur 1 Punkt abgezogen werden.*
- *Falls sich ein Team die Mühe macht, die Zahl 20! auszurechnen, sollten die Punkte anteilig nach der Anzahl der korrekten Ziffern vergeben werden, wobei für die 9. Ziffer 2 Punkte vergeben werden können.*

Aufgabe 3: Ziemlich beste Freundinnen

(Aufgabe (a): 5 Punkte, (b): 5 Punkte)

Diese Aufgabe besteht aus zwei Teilen, die unabhängig voneinander gelöst werden können.

(a) Alyssa, Berke, Clara, Daria und Emilia sind Logikfans und spielen gerne Spiele, bei denen es darauf ankommt, in jeder Spielrunde die richtigen Schlüsse zu ziehen. Emilia hat eine Schachtel mit insgesamt 10 einzelnen Ohrclips, davon sind 8 weiß und 2 rot. Sie zeigt ihren Freundinnen den Inhalt ihrer Schachtel. Sie steckt ihren 4 Freundinnen jeweils 2 Ohrclips an die Ohren, ohne dass sie sehen, welche Farbe ihre eigenen Ohrclips haben und welche der Ohrclips in der Schachtel zurückbleiben; sie können aber jeweils die Ohrclips der anderen sehen. Dann sagt sie:

> „Ich frage euch jede Minute, ob ihr die Farbe eurer Ohrringe bestimmen könnt. Wer eine falsche Anwort gibt, scheidet aus.“

Gesagt, getan. Nach einer Minute hat keine der Freundinnen eine Antwort parat und anwortet jeweils mit Nein, ebenso nach 2 Minuten. Aber nach 3 Minuten wissen alle Mädchen plötzlich, welche Farbe ihre Ohrclips haben und geben die richtige Antwort.

Wie kamen die Mädchen auf ihre Antwort, und wie sehen ihre Ohrringe jeweils aus?

(b) Die beiden Freundinnen Evi und Otti spielen ein Spiel, bei dem ihnen jemand kleine Zettel mit aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen größer oder gleich 0 an die Stirn klebt, so dass Evi nur Ottis Zahl lesen kann und Otti nur Evis Zahl. Die Freudinnen werden abwechselnd gefragt, ob sie ihre Zahl kennen. Ziel des Spiels ist es, als erstes die eigene Zahl zu nennen. Wer eine falsche Antwort gibt, scheidet aus.

Wir bezeichnen mit $n \in \mathbb{N}_0$ die kleinere der beiden Zahlen und nehmen an, dass Evi immer die gerade Zahl hat und Otti die ungerade (für engl. *even/odd* = gerade/ungerade). Hat zum Beispiel Evi die Zahl $n = 0$ und Otti die Zahl $n + 1 = 1$, dann sieht Otti, dass Evi die 0 hat, und weiß sofort, dass sie eine 1 haben muss (weil das die einzige natürliche Zahl ist, die infrage kommt, denn -1 ist keine nicht-negative ganze Zahl). Umgekehrt weiß Evi, die die 1 auf Ottis Stirn sieht, nur, dass sie entweder die 0 oder die 2 hat und kann auf die Frage, ob sie ihre Zahl kennt, nur mit Nein antworten. Otti kann also das Spiel gewinnen, unabhängig davon, wer anfängt.

Zeigt, dass das Spiel nach $n+1$ Schritten mit einer richtigen Antwort von der Spielerin mit der größeren der beiden Zahlen beendet werden kann, wenn Otti beginnt, und nach $n + 2$ Schritten, wenn Evi anfängt.

Lösung: Wir nehmen an, dass alle Beteiligten als Logikfans auf das richtige Denken der jeweils anderen vertrauen und während des Spielverlaufs unmögliche Varianten ausschließen.

(a) **(5 Punkte)** Wir greifen willkürlich Alyssa heraus und beschreiben ihre Gedankengänge. Alyssa überlegt sich zunächst, welche Kombinationen von Ohrclips Emilia an ihre Freundinnen verteilen konnte und kommt auf 4 mögliche Kombinationen von Paaren, s. Fig. 1.

Als nach einer Minute niemand seine Farbe bestimmen kann, kann Alyssa die ersten beiden Varianten ausgeschließen, denn anderenfalls hätte wenigstens eine Person die beiden roten Ohrclips gesehen und hätte gewusst, welche Farbe sie hat.

Alyssa weiß also nun, dass höchstens ein roter Ohrclip im Spiel sein kann; ihre Freundinnen wissen das auch. Wäre Alyssa diejenige mit dem roten Ohrclip, wüssten die

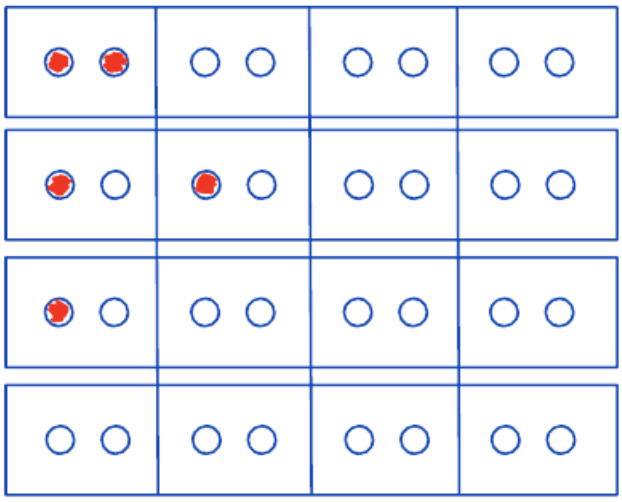


Abbildung 1: Mögliche Paare von Ohrclips.

anderen, dass sie selbst 2 weiße Ohrclips tragen und würden das spätestens nach 2 Minuten sagen. Da niemand etwas sagt, weiß Alyssa, dass sie 2 weiße Ohrclips haben muss und kann – so wie alle anderen – die richtige Antwort geben.

Bepunktungsvorschlag

- *1 Punkt fürs Hinschreiben aller relevanten Paarkombinationen*
- *2 Punkte für das Argument, dass nach einer Minute, in der niemand etwas sagt, die beiden ersten Varianten ausgeschlossen werden können*
- *je 1 Punkt für den Schluss, dass niemand einen roten Ohrring haben kann und dass nach Ablauf der 2 Minuten, als niemand etwas sagt, alle Mädchen wissen, dass sie 2 weiße Ohrringe tragen.*

Vermutlich werden sehr viele verschiedene Lösungen für Teilaufgabe (a) kursieren, bei denen die Schlussfolgerungen nicht chronologisch präsentiert werden oder der Wissensstand der Beteiligten in Minute $1 \pm \varepsilon$, $2 \pm \varepsilon$ *und* $3 \pm \varepsilon$ *diskutiert wird.*

Die Teilpunkte sollten dann mit etwas Fingerspitzengefühl vergeben werden, so dass sehr umständliche Lösungen nicht unbedingt die volle Punktzahl erhalten.

(b) **(5 Punkte)** Es hilft, das Beispiel zunächst weiterzuspinnen: Im Fall $(n, n+1) = (1, 2)$ kann Evi, die nach unserer Vereinbarung die gerade Zahl trägt, ihre Zahl nennen, sobald Otti zugegeben hat, die Zahl nicht zu kennen. Denn aus dieser Antwort erhält Evi die Information, dass sie nicht die Zahl 0 haben kann, die vorher noch für sie im Rennen war (denn sie hat ja die 1 auf Ottis Stirn gesehen); hätte sie nämlich die Zahl 0, wüsste Otti ihre Zahl und hätte das Spiel mit der richtigen Antwort zuerst beendet.

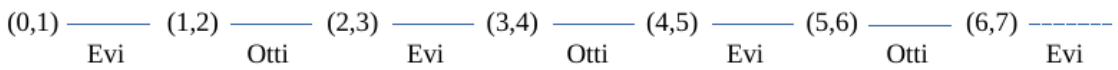
Betrachtet man größere Zahlen, merkt man schnell, dass diese Vorgehensweise schnell in die kombinatorische Hölle führt, denn die Argumentation ist stets von der Art „Evi weiß, dass Otti weiß, dass Evi weiß, dass Otti weiß, dass ...“. Das Beispiel legt jedoch nahe, dass sich die Aussage induktiv durch das sukzessive Auschließen von Möglichkeiten beweisen lässt – und zwar ausgehend von $(0, 1)$!

Graphischer Beweis: Die Strategie des sukzessiven Auschließens von Möglichkeiten lässt sich durch einen linearen Graphen visualisieren.

Wir bezeichnen Paare aufeinanderfolgender nicht-negativer ganzer Zahlen $(n, n+1)$, also $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 3)$, $(3, 4)$ usw., als Knoten und legen jeweils eine Kante zwischen zwei aufeinanderfolgende Knoten (siehe Abbildung). Jeder Kante wird genau ein Name

nach folgender Regel zugeordnet: Jede Kante erhält den Namen des Mädchens, das zu Beginn des Spiels *nicht* zwischen den Kombinationen der zugehörigen Knoten aus Basis der beobachteten Zahl beim Gegenüber unterscheiden kann.

Zum Beispiel kann Evi, die bei Otti die 1 sieht, nicht zwischen $(0,1)$ und $(1,2)$ unterscheiden; daher bekommt die zugehörige Kante ihren Namen. Umgekehrt kann Otti, die Evis 2 sieht, nicht zwischen den Knoten $(1,2)$ und $(2,3)$ unterscheiden, daher hat die Kante das Label Otti. Das Ganze sieht dann in etwa so aus:



Wir nehmen an, dass beide Freundinnen einen solchen Graphen vor sich liegen haben und in jedem Schritt die Knoten und Kanten wegstreichen, die den Möglichkeiten entsprechen, die auf Basis der bereits gegebenen Antworten verworfen werden können.

Beispielsweise sieht für die Zahlenkombination $(1,2)$ Evi eine 1 bei Otti, und Otti sieht eine 2 bei Evi. Daher kann Evi zunächst sämtliche Knoten ab $(2,3)$ wegstreichen, also $(2,3)$, $(3,4)$, $(4,5)$ usw., wohingegen Otti die Knoten $(0,1)$, $(3,4)$, $(4,5)$ usw. wegstreichen kann. Beide Mädchen warten nun darauf, dass die jeweils andere ihr durch ihre Antwort verrät, dass sie einen Knoten streichen kann. Das geschieht aber von links nach rechts, denn als erstes muss der Knoten $(0,1)$ ausgeschlossen werden, und das kann nur Otti, indem sie im ersten oder zweiten Schritt Nein sagt (je nachdem, wer anfängt). Bevor Otti also überhaupt irgendeine Aussage über den Knoten $(1,2)$ treffen kann, geschweige denn den Knoten $(2,3)$, schließt Evi den Knoten $(0,1)$ für sich aus und beendet damit das Spiel.

Allgemein sieht eine erfolgreiche „cutting edge“-Spielstrategie folgendermaßen aus:

- In jedem Schritt wird ein Knoten weggestrichen, zu dem keine Kante mit dem Namen der Spielerin führt, die zuletzt Nein gesagt hat; auch die übriggebliebene Kante wird entfernt. Da der Knoten $(0,1)$ nur eine Kante hat, fängt man mit ihm an und arbeitet sich dann von links nach rechts vor.
- Der Knoten $(0,1)$ mit nur einer Kante wird weggestrichen, sobald Otti zum ersten Mal Nein sagt. Dadurch entsteht ein neuer kleinster Knoten mit nur einer Kante, der Knoten $(1,2)$. Dieser wird gestrichen, wenn Evi zum ersten Mal Nein sagt, *nachdem* Otti bereits einmal Nein gesagt hat, was frühestens im zweiten Schritt passiert (wenn Otti anfängt) bzw. im dritten (wenn Evi anfängt).
- Das Ganze wird so lange wiederholt, bis eine der Spielerinnen nur noch den einen Knoten behält, der mit ihrer Beobachtung (d.h. der Zahl auf der Stirn ihrer Mitspielerin) konsistent ist. Sie kann dann ihre Zahl nennen und beendet das Spiel.

Die Vorgehensweise erklärt, warum die Spielerin mit der höchsten Zahl gewinnt: Die Spielerin, die den letzten Knoten vor dem Knoten $(n, n+1)$ ausschließt, hat die kleinere Zahl; sie verliert, weil sie ihrer Mitspielerin den entscheidenden Hinweis gibt.

Es ist nun auch klar, wie viele Schritte man dafür braucht: Mindestens $n+1$, denn frühestens im Schritt n wird der Knoten $(n-1, n)$ entfernt! Der erste Schritt ist aber nur dann informativ, wenn Otti beginnt, denn nur durch ihre Antwort kann $(0,1)$ als Möglichkeit ausgeschlossen werden. Fängt Evi an, können erst ab dem zweiten Schritt Knoten gestrichen werden und damit braucht man $n+2$ Schritte.

Beweis durch vollständige Induktion

Zur Erinnerung: Evi hat stets die gerade Zahl, Otti die ungerade.

- **Induktionsanfang:** Für $(n, n+1) = (0,1)$ hat Otti die größere Zahl und gewinnt im ersten oder zweiten Schritt, je nachdem, ob sie anfängt oder Evi.

Im Fall $(n, n+1) = (1, 2)$ hat Evi die größere Zahl und gewinnt im zweiten bzw. dritten Schritt: Fängt Otti an, kann sie ihre Zahl in Schritt 1 nicht nennen (sie könnte eine 1 oder eine 3 haben), Evi kennt dann aber in Schritt 2 ihre Zahl (sie könnte eine 0 oder eine 2 haben, kann aber aus der Tatsache, dass Otti die Zahl noch nicht kennt, folgern, dass es nicht die 0 ist). Fängt dagegen Evi an, muss sie erst Ottis verneinende Antwort in Schritt 2 abwarten, bevor sie in Schritt 3 ihre Zahl nennen kann.

Für $n = 0$ und $n = 1$ ist die Behauptung also richtig.

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung stimmt für $(n-1, n)$ mit festem $n \geq 1$.
- **Induktionsschritt (n gerade):** Es ist zu zeigen, dass die Behauptung für $(n, n+1)$, $n \geq 1$ stimmt und zwar unter der Induktionsvoraussetzung, dass sie für $(n-1, n)$ richtig ist. Wir nehmen dazu an, dass Evi die Zahl $n = 2k$ für ein $k \geq 1$ auf der Stirn hat. Otti hat also die größere Zahl $2k+1$, sie weiß aber nur, dass ihre Zahl $2k-1$ oder $2k+1$ ist (denn sie sieht die Zahl $2k$ bei Evi).

  Hätte Otti die Zahl $2k-1$, so hätte Evi nach der Induktionsvoraussetzung das Spiel in Schritt $2k$ bzw. $2k+1$ beendet. Sie tut es nicht, weil sie, die ja sieht, dass Otti die $2k+1$ hat, ihre Zahl noch nicht kennen kann. Daher weiß Otti nun aber, dass sie die Zahl $2k+1$ hat und kann in Schritt $n+1 = 2k+1$ bzw. $n+2 = 2k+2$ das Spiel beenden, indem sie ihre Zahl nennt.

  Otti gewinnt also mit der größeren Zahl $n+1$ nach $n+1$ bzw. $n+2$ Schritten.
- **Induktionsschritt (n ungerade):** In diesem Fall ist $n = 2k+1$ für irgendeine ganze Zahl $k \geq 1$ und Evi hat die größere Zahl, nämlich $n+1 = 2k+2$. Sie weiß aber zunächst nur, dass ihre Zahl entweder $2k$ oder $2k+2$ ist.

  Wenn Otti in Schritt $2k+1$ (wenn Otti begonnen hat) bzw. in Schritt $2k+2$ (wenn Evi angefangen hat) an der Reihe ist, ihre Zahl aber nicht nennen kann, weiß Evi nach Induktionsvoraussetzung, dass sie die größere Zahl hat, sprich: die Zahl $2k+2$. Sie beendet dann das Spiel mit der richtigen Antwort in Schritt $n+1 = 2k+2$ bzw. $n+2 = 2k+3$.

  D.h., Evi gewinnt mit der größeren Zahl $n+1$ nach $n+1$ bzw. $n+2$ Schritten.

Bepunktungsvorschlag

- *je 1 Punkt für die Idee, sukzessive die niedrigsten Zahlenkombinationen auszuschließen, und einen zielführenden Ansatz (z.B. Graph oder Induktion)*
- *1 Punkt für die Begründung, dass die größere Zahl gewinnt*
- *2 Punkte für das korrekte Abzählen der Schritte bis zum Ziel in Abhängigkeit davon, ob Evi oder Otti beginnen.*

Falls ein Team keinen allgemeine Lösung findet, aber nachvollziehbar erklärt, wie man z.B. von $(0, 1)$ zu $(1, 2)$ und $(2, 3)$ oder gar $(3, 4)$, dem Schlund zur kombinatorischen Hölle, kommt, sollte das mit bis zu 2 Punkten belohnt werden.

Aufgabe 4: Schnelles Wiegen

(Aufgabe (a): 3 Punkte, (b): 1 Punkt, (c): 2 Punkte, (d): 4 Punkte)

Dagobert Duck hat in drei Geldsäcken Taler gesammelt. Er hat den Verdacht, dass sich in jedem der Säcke ein falscher Taler befindet. Bevor er die Taler in seinen Geldspeicher bringt, möchte er sie daher auf ihre Echtheit überprüfen. Falsche Taler haben ein anderes Gewicht als die echten Taler und lassen sich durch Wiegen finden, denn die echten Taler sind alle gleich schwer.

Zum Wiegen benutzt Dagobert Duck seine Balkenwaage mit zwei gleich schweren Waagschalen. Die Waage neigt sich zur Seite der Schale mit dem schwereren Inhalt, hat aber keine Skala. Er kann also lediglich feststellen, welche Seite leichter und welche schwerer ist.

(a) Im ersten Sack befinden sich 9 identisch aussehende Taler, von denen 8 echt sind (und gleich schwer) und einer zu leicht ist. Dagobert Duck möchte den falschen Taler mit möglichst wenigen Wiegevorgängen aussortieren. Entwickelt dafür eine geeignete Vorgehensweise, und gebt an, wie oft Dagobert mit dieser Methode höchstens wiegen muss (Worst-Case-Abschätzung). Begründet, dass Eure Lösung in dem Sinne optimal ist, dass es keine Methode mit einer besseren Worst-Case-Schranke gibt.

(b) Käme Dagobert Duck bei 10 Talern auch mit der gleichen Anzahl an Wiegevorgängen aus, die bei 9 Talern höchstens nötig waren, um den einen falschen Taler zu finden? Begründet Eure Antwort.

(c) Im zweiten Sack sind 2023 Taler, von denen 2022 echt sind und einer leichter ist. Wie viele Wiegevorgänge braucht Dagobert Duck höchstens, um den falschen Taler zu ermitteln? Begründet Eure Antwort durch Angabe einer möglichen Vorgehensweise.

(d) Nun widmet er sich dem dritten Sack. Darin befinden sich 12 Taler, von denen 11 echt sind und einer falsch ist. Diesmal weiß Dagobert aber nicht, ob der falsche Taler leichter oder schwerer ist. Wieder möchte er den falschen Taler mittels möglichst weniger Wiegevorgänge aussortieren und dabei auch herausfinden, ob der falsche Taler leichter oder schwerer als die echten Taler ist. Entwickelt dafür eine geeignete Vorgehensweise und gebt an, wie oft Dagobert Duck höchstens wiegen muss.

Lösung: Grundsätzliche Beobachtung zu Dagobert Ducks Balkenwaage und seinen Talern: Von n Talern wiegen $n-1$ Stück gleich viel, nur einer ist leichter in den Aufgabenteilen (a)-(c). Der Balken der Waage steht waagerecht, wenn die Taler in beiden Waagschalen das gleiche Gesamtgewicht haben. Bei den verwendeten Talern ist das nur möglich, wenn in beiden Waagschalen gleich viele Taler liegen. Liegen in beiden Waagschalen gleich viele Taler und schlägt die Waage zu einer Seite aus, dann muss auf der leichteren Seite der zu leichte Taler liegen. Wenn die Waage nicht ausschlägt, hat Dagobert Duck lauter gleich schwere, also echte Taler gewogen. In den Aufgabenteilen (a)-(c) muss er diese daher für nachfolgende Wiegevorgänge nicht weiter berücksichtigen.

Dagobert Duck muss bei jedem Wiegen also darauf achten, in die beiden Waagschalen gleich viele Taler zu legen. Ergibt ein Wiegevorgang keinen Ausschlag der Balkenwaage, so sind die gewogenen Taler gleich schwer, daher echt.

Dagobert Duck möchte mit möglichst wenigen Wiegevorgängen zum Ziel kommen. Er muss aber den Worst Case berücksichtigen, in dem er den falschen Taler erst beim letzten Wiegen entdeckt.

(a) **(3 Punkte)** Dagobert Duck teilt die 9 Taler in drei 3er-Haufen 1, 2, 3 ein. Beim ersten Wiegen wird 3er-Haufen 1 gegen 3er-Haufen 2 abgewogen. Schlägt die Waage aus, so wird im 2. Schritt vom leichteren 3er-Haufen ein Taler weggelegt und die beiden verbleibenden Taler gegeneinander abgewogen. Schlägt die Waage aus, so liegt der leichtere Taler auf der leichteren Seite. Schlägt die Waage nicht aus, so ist der leichtere Taler der, der auf die Seite gelegt worden war. Schlug die Waage beim ersten Wiegen nicht aus, so ist der falsche Taler unter den drei Talern des bislang noch nicht berücksichtigten 3er-Haufen 3 zu finden. Also ist Schritt 2 für Haufen 3 durchzuführen. Dagobert Duck findet den zu leichten Taler also nach höchstens zweimal Wiegen.

Er kann den zu leichten Taler unter den 9 Talern im Allgemeinen aber nicht mit nur einem Wiegevorgang ermitteln: Um dies zu erreichen, müsste er

- entweder einen Taler auf die Seite legen und die verbleibenden 8 als zwei 4er-Haufen gegeneinander abwiegen. Damit er schon nach dem 1. Wiegen fertig wäre, müsste der weggelegte Taler der leichte sein, was i.A. nicht der Fall ist,
- oder zwei einzelne Taler gegeneinander abwiegen. Damit er nach dem 1. Wiegen fertig wäre, müsste einer dieser beiden Taler der leichtere sein. Auch dies ist i.A. nicht der Fall.

Bepunktungsvorschlag

- *1 Punkt: Beschreibung einer Vorgehensweise*
- *1 Punkt: Richtige Antwort zweimal Wiegen*
- *1 Punkt: Argument, warum zweimal Wiegen optimal ist*

Allgemein gilt Folgendes: *Sei S die Menge der Taler in einem Sack, von denen $n-1$ gleich schwer sind und einer zu leicht ist und die Dagobert Duck durch Wiegen auf Echtheit überprüfen will. Die Anzahl der Taler in S werde mit $|S|$ bezeichnet. Die geringste Anzahl der höchstens benötigten Wiegevorgänge, um den zu leichten Taler zu ermitteln, ergibt sich als die Zahl $n \in \mathbb{N}$, für die gilt:*

$$3^{n-1} < |S| \leq 3^n \,.$$

Sei $n \in \mathrm{N}$ und sei zunächst $|S| = 3^n$. Teilt Dagobert Duck diese Taler in drei gleich große Haufen, so kann er durch das Wiegen nur bestimmen, welcher der drei Haufen der leichtere ist. Dieser enthält 3^{n-1} Taler. Durch diese Vorgehensweise reduziert sich die Anzahl der zu wiegenden Taler in jedem Schritt um einen Faktor drei. Dadurch ist ersichtlich, dass er den zu leichten Taler nach höchstens n Wiegevorgängen entdeckt. Ist nun $3^{n-1} < |S| < 3^n$, so kann Dagobert Duck analog vorgehen. Im 1. Schritt bildet er drei Haufen, die jeweils aus nicht mehr als 3^{n-1} Talern bestehen und von denen zwei gleich viele Taler enthalten. Er legt die beiden gleich großen Haufen zum Wiegen in die Waagschalen und den dritten Haufen beiseite. Durch Wiederholung dieser Vorgehensweise findet er auch dann den leichten Taler nach höchstens $n-1$ weiteren Wiegevorgängen.

Da in jedem Schritt mit drei Haufen gearbeitet werden muss und dabei lediglich entschieden wird, welcher der drei der leichtere ist, kann jeder Schritt die Anzahl der zu untersuchenden Taler höchstens um einen Faktor drei reduzieren. Wenn also $|S| > 3^{n-1}$ ist, können daher i.A. nicht schon $n-1$ Wiegevorgänge ausreichend sein, um den leichten Taler zu finden.

(b) **(1 Punkt)** Es muss untersucht werden, ob Dagobert Duck bei 10 Talern auch mit zweimal Wiegen zum Ziel kommt:

Dagobert Duck folgt der oben beschriebenen Vorgehensweise, d.h. er teilt die 10 Taler in drei möglichst gleich große Haufen auf und wiederholt dies für jeden weiteren Wiegevorgang. Gemäß des obigen allgemeinen Resultats gilt hier $3^2 < 10 = |S| \leq 3^3$. Er

benötigt bei 10 Talern also schon drei Wiegevorgänge. Das Vorgehen ist dabei nicht eindeutig. Eine mögliche Vorgehensweise kann dabei wie folgt aussehen: Für das 1. Wiegen teilt er die 10 Taler in zwei 3er-Haufen 1,2 und in einen 4er-Haufen 3. Es werden die Haufen 1 und 2 gegeneinander abgewogen. Schlägt die Waage aus, so kann wie unter (a) verfahren werden und er wäre nach zweimal Wiegen fertig. Schlägt die Waage beim 1. Wiegen aber nicht aus, so befindet sich der leichtere Taler unter den 4 Talern aus Haufen 2. In Schritt 2 werden daraus nun 2 Taler gegeneinander abgewogen. Schlägt die Waage aus, hat Dagobert Duck den leichteren Taler gefunden. Schlägt die Waage in Schritt 2 noch nicht aus, so befindet sich der leichtere Taler unter den beiden verbliebenen Talern und diese sind in Schritt 3 gegeneinander abzuwiegen. Dagobert Duck findet also erst durch dreimaliges Wiegen den leichteren Taler unter den 10 Talern.

(c) **(2 Punkte)** Es ist

$$3^6 = 729 < 2023 \leq 3^7 = 2187\,.$$

Gemäß des in (a) beschriebenen allgemeinen Resultats benötigt Dagobert Duck also 7 Wiegevorgänge, indem er die zu wiegenden Taler für jeden Wiegevorgang $k \in \{1, \ldots, 7\}$ in drei Haufen aufteilt, die jeweils aus höchstens 3^{7-k} Talern bestehen und von denen zwei exakt gleich groß sind. Dies kann z.B. so wie in Abbildung 2 aussehen.

Bepunktungsvorschlag

- *1 Punkt: Beschreibung einer Vorgehensweise*
- *1 Punkt: Richtige Antwort siebenmal Wiegen*

(d) **(4 Punkte)** Dagobert Duck benötigt drei Wiegevorgänge, um unter den 12 Talern den einen falschen zu ermitteln und um dabei auch zu bestimmen, ob dieser leichter oder schwerer als die echten Taler ist. Zweimaliges Wiegen ist hier nicht mehr ausreichend. Seine Vorgehensweise kann dabei wie folgt aussehen:

- Die 12 Taler werden durchnummeriert als Taler 1 – 12
- Es werden 4 gleich große Haufen gebildet, z.B.

$$\begin{aligned}
\text{Haufen 1} &= \{1, 4, 7\}\,,\\
\text{Haufen 3} &= \{2, 5, 8\}\,,\\
\text{Haufen 3} &= \{3, 6, 9\}\,,\\
\text{Haufen 4} &= \{10, 11, 12\}\,,
\end{aligned}$$

- Beim 1. und 2. Wiegen ist wichtig, dass die Taler der Haufen 1-3 jedesmal auf eine andere Waagschale, bzw. neben die Waage kommen.
- Beim 3. Wiegen wird spätestens der falsche Taler ermittelt und entschieden, ob er leichter oder schwerer ist.

Damit wird nun z.B. wie folgt gewogen:

1. Wiegen: Haufen 1 mit Taler 10 gegen Haufen 2 mit Taler 11, also

Waagschale 1	Waagschale 2	Neben der Waage
1, 4, 7, 10	2, 5, 8, 11	3, 6, 9, 12

2. Wiegen: Haufen 2 mit Taler 10 gegen Haufen 3 mit Taler 11, also

Waagschale 1	Waagschale 2	Neben der Waage
2, 5, 8, 10	3, 6, 9, 11	1, 4, 7, 12

Die beiden Wiegevorgänge lassen folgende vier Fälle zu:

A) Ausschlag beim 1. und 2. Wiegen

- beide Male links runter ⇒ 10 schwerer ⇒ fertig.
- beide Male links hoch ⇒ 10 leichter ⇒ fertig.

a) 1. rechts, 2. links runter ⇒ Haufen 2 schwerer.
b) 1. rechts, 2. links hoch ⇒ Haufen 2 leichter.

B) Ausschlag beim 1. Wiegen, kein Ausschlag beim 2. Wiegen

⇒ Haufen 2, 3 und 10, 11 sind echt. Außerdem: Geht der Ausschlag der Waage

a) links runter ⇒ Haufen 1 schwerer.
b) links hoch ⇒ Haufen 1 leichter.

C) Kein Ausschlag beim 1. Wiegen, Ausschlag beim 2. Wiegen

⇒ Haufen 1, 2 und 10, 11 sind echt. Außerdem: Geht der Ausschlag der Waage

a) links runter ⇒ Haufen 3 schwerer.
b) links hoch ⇒ Haufen 3 leichter.

D) Weder Ausschlag beim 1. noch beim 2. Wiegen

⇒ 12 falsch. Es muss noch bestimmt werden, ob schwerer oder leichter.

3. Wiegen: Im Fall D) ist bereits klar, dass Taler 12 falsch ist und die Taler 1 – 11 echt sind. Um rauszufinden ob Taler 12 leichter oder schwerer ist, kann Dagobert Duck diesen also beim 3. Wiegen gegen einen beliebigen der anderen 11 Taler abwiegen.

Die Fälle A)-C) haben jeweils drei Kandidaten für falsche Taler ergeben. In jedem dieser 3 Fälle wird beim 3. Wiegen je einer dieser drei Kandidaten auf die Waagschalen bzw. neben die Waage gelegt. Die restlichen Plätze auf diesen drei Haufen werden

gleichmäßig mit den Talern aufgefüllt, die bereits als echt ermittelt werden konnten. Dies geschieht so, dass in den drei Haufen in Waagschale 1, in Waagschale 2 bzw. neben der Waagschale beim Vergleich der Belegung beim 2. und 3. Wiegen immer genau ein Taler an seinem Platz bleibt. Die Befüllung der Waagschalen und des Haufens neben der Waage kann beim 3. Wiegen also wie folgt aussehen:

Waagschale 1	Waagschale 2	Neben der Waage
2, 4, 9, 11	3, 5, 7, 12	1, 6, 8, 10

Die drei Fälle A)-C) mit ihren jeweiligen Unterfällen a) und b) lassen daher folgende Schlüsse zu:

A) Kandidaten für den falschen Taler sind 2, 5, 8,
als echt ermittelt wurden schon die Taler
1, 4, 7, 3, 6, 9, 10, 11, 12.
Nun gilt beim 3. Wiegen:
- Ausschlag ⇒ 2 bzw. 5 falsch, zusammen mit a)/b) erschließt sich, ob schwerer/leichter.
- kein Ausschlag ⇒ 8 falsch, zusammen mit a)/b) erschließt sich, ob schwerer/leichter.

B) Kandidaten für den falschen Taler sind 1, 4, 7,
als echt ermittelt wurden schon die Taler
2, 5, 8, 3, 6, 9, 10, 11, 12.
Nun gilt beim 3. Wiegen:
- Ausschlag ⇒ 4 bzw. 7 falsch, zusammen mit a)/b) erschließt sich, ob schwerer/leichter.
- kein Ausschlag ⇒ 1 falsch, zusammen mit a)/b) erschließt sich, ob schwerer/leichter.

C) Kandidaten für den falschen Taler sind 3, 6, 9,
als echt ermittelt wurden schon die Taler
1, 4, 7, 2, 5, 8, 10, 11, 12.
Nun gilt beim 3. Wiegen:
- Ausschlag ⇒ 9 bzw. 3 falsch, zusammen mit a)/b) erschließt sich, ob schwerer/leichter.
- kein Ausschlag ⇒ 6 falsch, zusammen mit a)/b) erschließt sich, ob schwerer/leichter.

Bepunktungsvorschlag

- *3 Punkte: Beschreibung einer Vorgehensweise, mit Abstufungen von 1-3 Punkten*
- *1 Punkt: Richtige Antwort dreimal Wiegen*

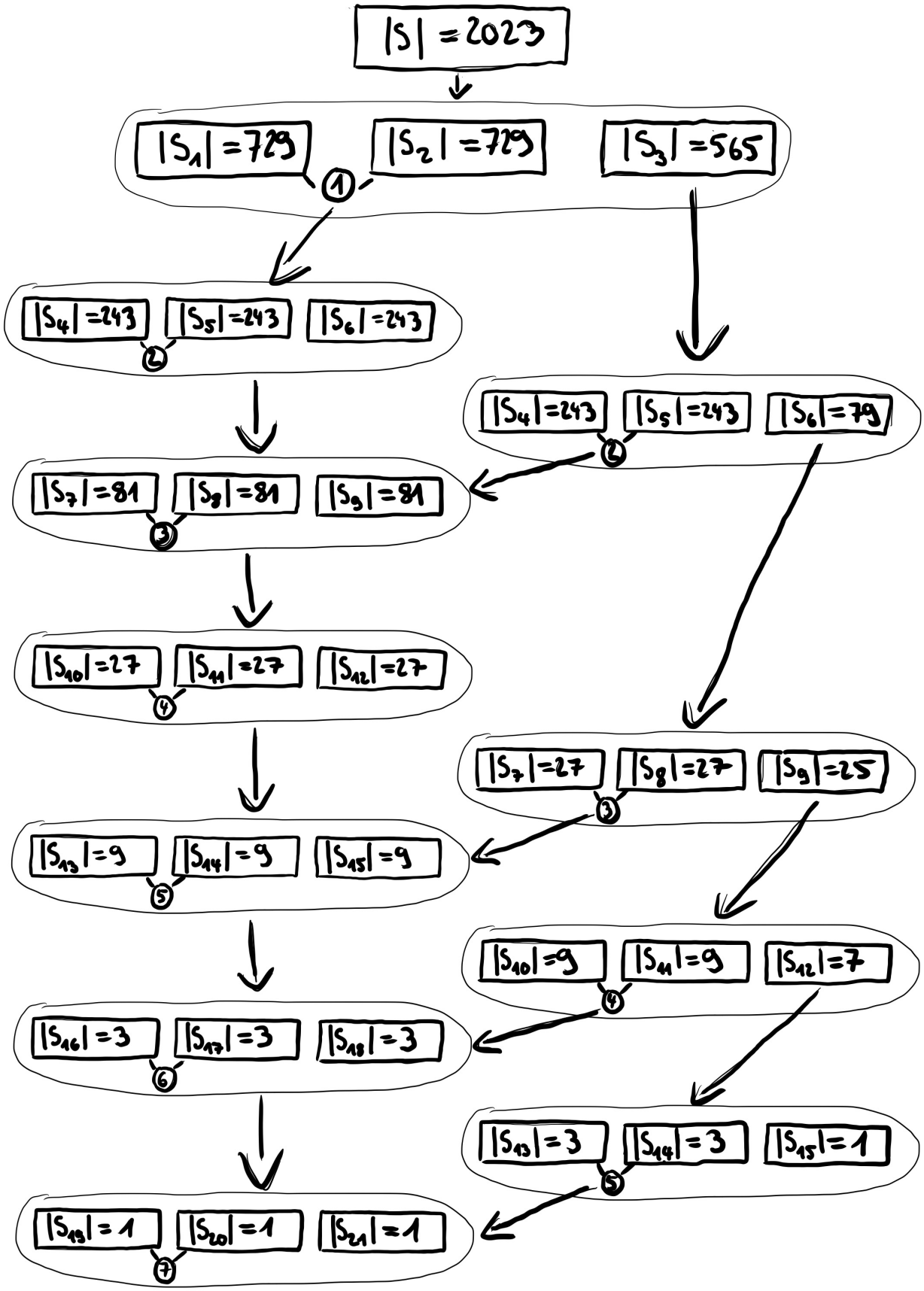


Abbildung 2: Eine mögliche Vorgehensweise für Aufgabe 4 (c), um unter $|S| = 2023$ Talern den einen leichteren durch max. 7 Wiegevorgänge zu ermitteln.