Schule:	**Team-Nummer:**	**PUNKTE**

Aufgabe 1: Der gestohlene Zauberstab

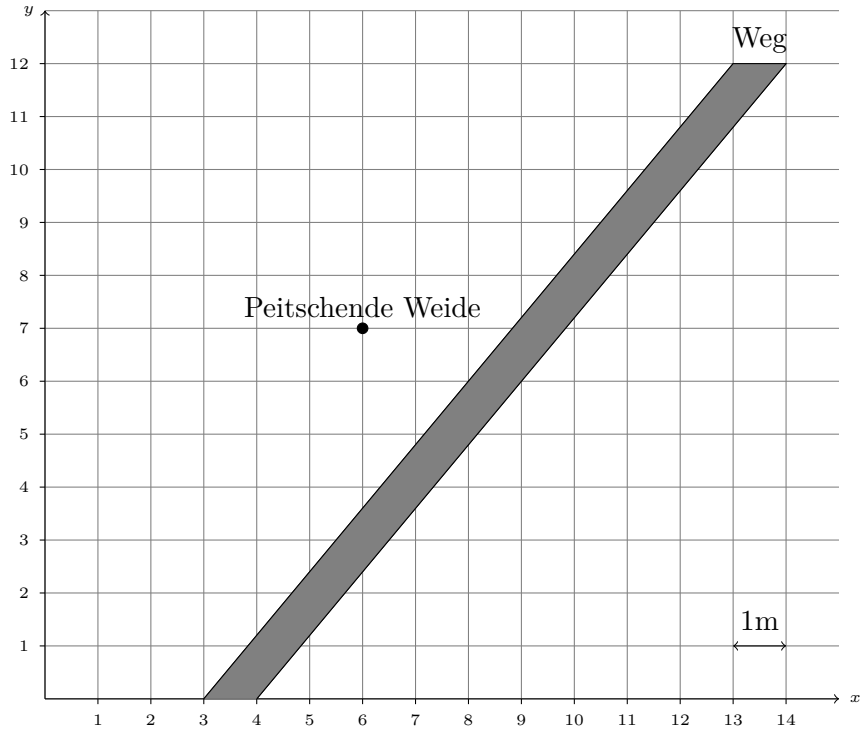
(Aufgabe (a) : 4 Punkte, (b) : 4 Punkte, (c) : 2 Punkte)

Harry Potter ist der Zauberstab gestohlen worden. Harry, Hermine und Ron finden auf der Karte des Rumtreibers einen Hinweis auf das Versteck des Zauberstabs.

(a) Bestimmt durch eine geometrische Konstruktion die Anzahl der Orte, an denen nach dieser Beschreibung der Zauberstab liegen könnte. Konstruiert direkt in der Karte und beschreibt eure Konstruktion auf der Rückseite oder dem folgenden Blatt.

Karte des Rumtreibers

Der Zauberstab liegt sechs Meter von der peitschenden Weide entfernt und einen Meter neben dem Wegesrand.



Nach längerem Graben finden sie an einem der Orte eine zauberstabförmige Truhe, die durch ein Zahlenschloss gesichert ist. Am Schloss lassen sich vier Ziffern von 0 bis 9 einstellen. Auf der Unterseite der Truhe ist etwas eingeritzt. „Das sind Hinweise zur richtigen Zahlenkombination“, sagt Hermine.

(1) Zwei Ziffern sind gerade und zwei Ziffern sind ungerade.
(2) Die Summe der geraden Ziffern ist gleich der Summe der ungeraden Ziffern.
(3) Alle Ziffern sind verschieden.
(4) Eine Ziffer ist die „1“.

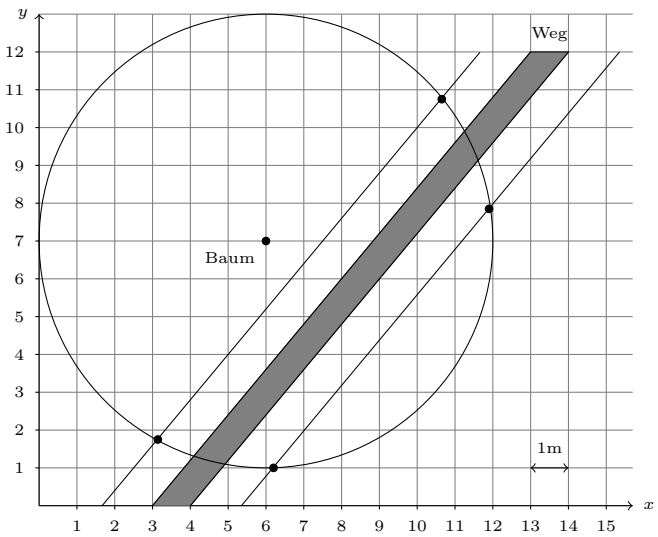
(b) Aus welchen Ziffern kann die Zahlenkombination bestehen? Bestimmt alle Möglichkeiten und begründet, dass es keine weiteren gibt.

(c) Bestimmt, wie viele Einstellungen des Zahlenschlosses die Zauberer überprüfen müssen, wenn sie nicht noch einen weiteren Hinweis finden.

Hinweis: Gerade Ziffern sind 0, 2, 4, 6, 8, ungerade Ziffern sind 1, 3, 5, 7, 9.

Benutzt für die Lösung bitte die Rückseite und das folgende Blatt.

(a) Die möglichen Orte, an denen der Zauberstab sein könnte, werden durch maßstäbliche Konstruktion gefunden. Alle Punkte, die 6 Meter vom Baum („Peitschende Weide“) entfernt sind, liegen auf einem Kreis mit Radius $r = 6\,\mathrm{m}$ um den Baum. Alle Punkte, die einen Meter vom Wegesrand entfernt sind, liegen auf einer der beiden Parallelen zu den Wegesrändern mit dem Abstand von einem Meter. Die beiden Parallelen schneiden den Kreis in vier Punkten. Diese sind die möglichen Orte für die Lage des Zauberstabs.



Bepunktungsvorschlag:

- *3 Punkte für die richtige Konstruktion mit Beschreibung*
- *1 Punkt für die Angabe, dass es vier Möglichkeiten für die Lage des Zauberstabs gibt*

(b) Aus den Aussagen (1) und (4) und (3) folgen die möglichen ungeraden Ziffern: 1 und 3, 1 und 5, 1 und 7, 1 und 9. Aus den Bedingungen (2) und (3) folgen dann die jeweils möglichen geraden Ziffern. Alle Möglichkeiten für Ziffern der Zahlenkombination des Schlosses stehen in der 4. Spalte der Tabelle. Damit wurden alle Möglichkeiten gefunden.

ungerade Ziffern	Summe	gerade Ziffern	Ziffern der Kombination
1 und 3	$1+3=4$	$4=0+4$	$1,3,0,4$
1 und 5	$1+5=6$	$6=0+6$ $6=2+4$	$1,5,0,6$ $1,5,2,4$
1 und 7	$1+7=8$	$8=0+8$ $8=2+6$	$1,7,0,8$ $1,7,2,6$
1 und 9	$1+9=10$	$10=2+8$ $10=4+6$	$1,9,2,8$ $1,9,4,6$

Bepunktungsvorschlag:

- *2 Punkte für die Angabe aller möglicher Zahlenkombinationen*
- *1 Punkt für die Begründung, dass die angegebenen Zahlen korrekt sind*
- *1 Punkt für die Begründung, dass es keine weiteren Möglichkeiten gibt*

(c) Da sich vier verschiedene Ziffern auf $(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 =)24$ verschiedene Arten anordnen lassen und es sieben Möglichkeiten für die Auswahl der Ziffern gibt, müssen die Kinder $(24 \cdot 7 =)168$ Einstellungen an dem Zahlenschloss überprüfen.

Bepunktungsvorschlag:

- *1 Punkt für die Angabe, dass es 24 Möglichkeiten gibt, 4 Ziffern anzuordnen*
- *1 Punkt für die Multiplikation der sieben Möglichkeiten für die Auswahl der Ziffern mit den 24 Möglichkeiten der Anordnung der 4 Ziffern*

Schule:	**Team-Nummer:**	**PUNKTE**

Aufgabe 2: Lehrerinnen und ihre Fächer

(Aufgabe (a) : 6 Punkte, (b): 4 Punkte)

An einer Schule in der Klasse 7b werden die Unterrichtsstunden in Biologie, Geographie, Englisch, Französisch, Physik und Mathematik von drei Lehrerinnen gehalten, Frau Meyer, Frau Wegener und Frau Teichert. Von diesen drei Lehrerinnen ist uns Folgendes bekannt:

1. Jede von ihnen lehrt in zwei Fächern.
2. Die Lehrerin für Geographie und die Französischlehrerin sind Hausnachbarn.
3. Frau Meyer ist die jüngste von den dreien.
4. Alle drei – die Lehrerin für Biologie, die für Französisch und Frau Teichert – haben einen gemeinsamen Arbeitsweg.
5. Die Biologielehrerin ist älter als die Mathematiklehrerin.
6. In der Freizeit spielen die Englischlehrerin, die Mathematiklehrerin und Frau Meyer gern Doppelkopf, wenn sie eine vierte Mitspielerin finden.

(a) Wer unterrichtet welche Fächer? Benutzt zur Begründung eurer Entscheidung die vorgegebene Nummerierung der Aussagen in der Aufgabenstellung.

(b) Die Gruppe neben euch hat gerade versucht, die richtigen Fächerkombinationen einfach zu raten. Bestimmt die Wahrscheinlichkeit, dass sie mit ihrem Tipp richtig liegen.

Schreibt euren Lösungsweg nachvollziehbar auf.

Platz für die Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

(a) Aus der Aufgabenstellung folgt (da die in jeweils einer Aussage erwähnten Lehrerinnen voneinander verschieden sein müssen, also z. B. die Lehrerin für Biologie, die für Französisch und Frau Teichert wegen (4)):

(3), (5)	$\Longrightarrow$	Frau Meyer unterrichtet nicht Biologie. (7)
(6)	$\Longrightarrow$	Frau Meyer unterrichtet nicht Englisch und nicht Mathematik. (8)
(4)	$\Longrightarrow$	Frau Teichert ist nicht Bio-Lehrerin und nicht Französischlehrerin. (9)
(7), (9)	$\Longrightarrow$	Frau Wegener unterrichtet Biologie. (10)
(4), (10)	$\Longrightarrow$	Frau Meyer ist die Französischlehrerin. (11)
(2), (1), (11)	$\Longrightarrow$	Frau Meyer unterrichtet auch Physik. (12)
(10), (6)	$\Longrightarrow$	Frau Teichert ist die Mathematiklehrerin. (13)
(6),(13)	$\Longrightarrow$	Frau Wegener unterrichtet Englisch. (14)

Eine Tabelle kann nützlich sein.

	Biologie	Geographie	Englisch	Französisch	Physik	Mathematik
Meyer	– (3,5)	– (2,1)	– (6)	✓ (4,10)	✓	– (6)
Wegener	✓	–	✓	– (11)	– (12)	–
Teichert	– (4)	✓	– (14)	– (4)	– (12)	✓ (10,6)

Frau Meyer unterrichtet also Französisch/Physik,
Frau Wegener unterrichtet also Biologie/Englisch und
Frau Teichert unterrichtet also Geographie/Mathematik.

Bepunktungsvorschlag:

- *insgesamt 1 Punkt für das Erschließen der Aussagen (7) und (8)*
- *insgesamt 1 Punkt für das Erschließen der Aussagen (9) und (10)*
- *4 Punkte (jeweils 1 Punkt) für das Erschließen der Aussagen (11) bis (14)*

Es sind natürlich auch andere Lösungswege (Reihenfolgen der Schlüsse) denkbar. Die Bepunktung ist dann entsprechend anzupassen.

(b) Die Wahrscheinlichkeit, die Kombinationen richtig zu raten, ist $\frac{1}{90} \approx 1,1\%$.

1. Lösungsweg: Abzählen der Möglichkeiten

Es gibt 6! Möglichkeiten, die sechs Fächer den drei Lehrerinnen zuzuordnen:

Meyer, 1. Fach;	Meyer, 2. Fach;
Wegener, 1. Fach;	Wegener, 2. Fach;
Teichert, 1. Fach;	Teichert, 2. Fach

Für die günstigen Fälle gibt es für Frau Meyers erstes Fach 2 Möglichkeiten, für ihr zweites Fach eine Möglichkeit, für Frau Wegeners erstes Fach wieder 2 Möglichkeiten, für ihr zweites Fach eine Möglichkeit, und für Frau Teicherts erstes Fach ebenfalls 2 Möglichkeiten sowie für ihr zweites Fach eine Möglichkeit, insgesamt also $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ günstige Möglichkeiten. Man erhält für die Wahrscheinlichkeit

$$p = \frac{8}{6!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 3} = \frac{1}{90}.$$

2. Lösungsweg: Urnenmodell

Die Fächer entsprechen den Kugeln. Nacheinander werden in vier Zügen die Fächer von Frau Meyer und Frau Wegener gezogen. Man erhält in den einzelnen Zügen durch Betrachtung der verbleibenden „günstigen Kugeln“:

- 1. Zug: Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Fach Frau Meyer gehört: $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$
- 2. Zug: Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Fach das zweite Fach von Frau Meyer ist: $\frac{1}{5}$
- 3. Zug: Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Fach Frau Wegener gehört: $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
- 4. Zug: Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Fach das zweite Fach von Wegener ist: $\frac{1}{3}$
- 5. Zug: Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Fach Frau Teichert gehört: $\frac{2}{2} = 1$
- 6. Zug: Wahrscheinlichkeit, dass das gezogene Fach das zweite Fach von Teichert ist: 1

Insgesamt erhält man eine Wahrscheinlichkeit von

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{90}.$$

Bepunktungsvorschlag:

1. Lösungsweg:

- *1 Punkt für 1. Zug*
- *1 Punkt für 2. Zug*
- *1 Punkt für 3. und 4. Zug zusammen*
- *1 Punkt für Gesamtergebnis*

2. Lösungsweg:

- *1 Punkt für sinnvollen Ansatz*
- *1 Punkt für 6! mögliche unterschiedliche Fächerkombinationen*
- *1 Punkt für 8 günstige unterschiedliche Fächerkombinationen*
- *1 Punkt für Ergebnis*

Schule:	**Team-Nummer:**	PUNKTE

Aufgabe 3: Zahlentripel

(Aufgabe (a) : 3 Punkte, (b): 7 Punkte)

Über drei positive ganze Zahlen a, b und c ist bekannt:

(1) Für das kleinste gemeinsame Vielfache $\mathrm{kgV}(a, b, c)$ dieser Zahlen gilt $\mathrm{kgV}(a, b, c) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

(2) Für den größten gemeinsamen Teiler $\mathrm{ggT}(a, b, c)$ dieser Zahlen gilt $\mathrm{ggT}(a, b, c) = 90$.

(3) Es gilt $3a < b < c$.

(4) Die Zahl b ist eine Quadratzahl.

(a) Beweist, dass $b = 900$ gelten muss, und bestimmt die Primfaktorzerlegung von b.

(b) Ermittelt nun alle Zahlentripel (a, b, c), welche die Bedingungen (1) bis (4) erfüllen. Begründet, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Platz für die Lösung:

Benutzt für die Lösung bitte auch die Rückseite und das folgende Blatt.

Es seien a, b, c positive ganze Zahlen mit diesen Eigenschaften:

$$\mathrm{kgV}(a, b, c) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \tag{1}$$

$$\mathrm{ggT}(a, b, c) = 90 \tag{2}$$

$$3a < b < c \tag{3}$$

$$b \text{ ist eine Quadratzahl} \tag{4}$$

(a) Nach (1) ist b Teiler von $(2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2)$, kann also keine anderen Primfaktoren als 2, 3 und 5 besitzen und diese höchstens mit den angegebenen Exponenten. Wegen (2) ist b aber auch durch $90 = (2 \cdot 3^2 \cdot 5)$ teilbar, *muss* also auch alle diese Primfaktoren enthalten, und zwar mindestens mit diesen Exponenten. Und wegen (4) treten alle Primfaktoren von b in gerader Anzahl auf. Daraus folgt

$$b = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 900. \tag{5}$$

3 P

(b) Wegen (2) müssen a und c durch 90 teilbar sein, also gilt $a = 90x$ und $c = 90y$ mit $x, y \in \mathbb{N}$. Mit $b = 900$ erhalten wir aus (2):

$$\mathrm{ggT}(x, 10, y) = 1. \tag{6}$$

Weiterhin ist

$$\mathrm{kgV}(a, 900, c) = \mathrm{kgV}(90x, 900, 90y) = 90 \cdot \mathrm{kgV}(x, 10, y)$$

und mit (1) ist

$$\mathrm{kgV}(a, 900, c) = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = (2 \cdot 3^2 \cdot 5) \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5 = 90 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$$

woraus

$$\mathrm{kgV}(x, 10, y) = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \tag{7}$$

folgt. Wegen (3) erhalten wir zusätzlich

$$3x < 10 < y. \tag{8}$$

1 P

Es sei nun (x, y) ein solches Paar positiver ganzer Zahlen. Wegen (8) ist $x \in \{1, 2, 3\}$. *1 P*

Angenommen, es gilt $x = 2$. Dann muss y wegen (7) durch 2^2 (und durch 3) teilbar sein, denn die Zerlegungen von 2 und 10 enthalten nur die Primzahlpotenzen 2^1 und 5^1. Das aber widerspricht (6), denn dann wäre $\mathrm{ggT}(2, 10, y) = 2$. Damit bleibt $x \in \{1, 3\}$. *1 P*

Wir ermitteln nun zu diesen x systematisch alle Zahlen y, so dass (6), (7) und (8) erfüllt sind. Daraus erhalten wir dann durch Multiplikation mit 90 alle Tripel (a, b, c), die ihrerseits (1)–(4) erfüllen. Dabei gilt: Wegen (7) muss y durch 2^2 teilbar sein (denn $x < 2^2$). Außerdem muss eine Zahlen x und y durch 3 teilbar sein. *2 P*

Da wir alle möglichen Fälle systematisch ausprobiert haben, gibt es bis auf die Tripel

$$(90, 900, 1080), \quad (90, 900, 5400), \quad (270, 900, 1080), \quad (270, 900, 1800), \quad (270, 900, 5400)$$

keine weiteren Lösungen. *1 P*

x	y	(6)	(7)	(8)	a	b	c
1	$2^2 \cdot 3$	✓	✓	✓	90	900	1080
1	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	✓	✓	✓	90	900	5400
3	2^2	✓	✓		–	–	–
3	$2^2 \cdot 3$	✓	✓	✓	270	900	1080
3	$2^2 \cdot 5$	✓	✓	✓	270	900	1800
3	$2^2 \cdot 3 \cdot 5$	✓	✓	✓	270	900	5400

Bepunktungsvorschlag:

Für den obigen Lösungsweg:

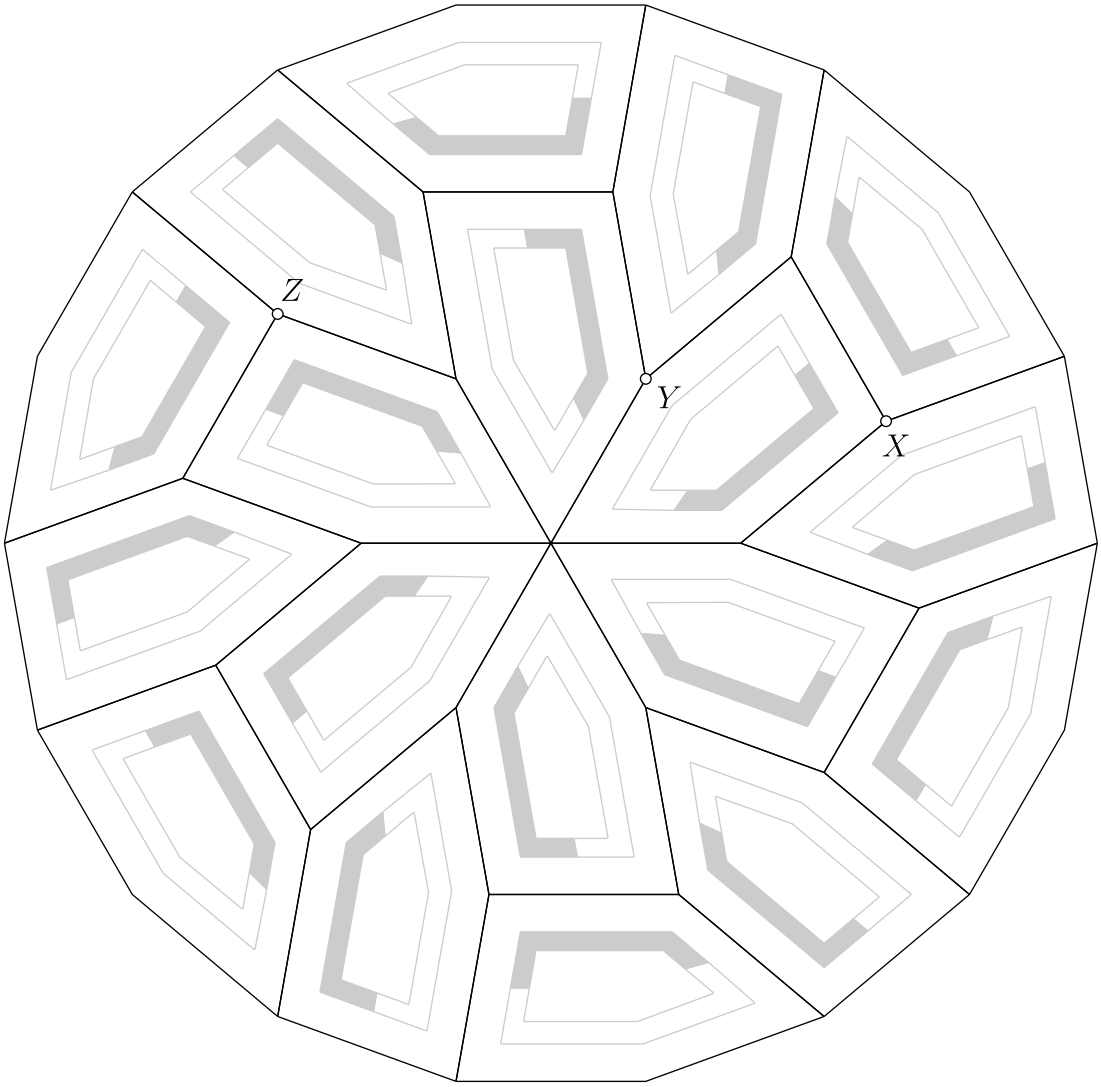
- *3 Punkte für das Erschließen von* $b = 900$ *mittels Primfaktorzerlegung.*
- *1 Punkt für das Einsetzen von* $b = 900$ *in die Bedingungen*
- *1 Punkt für das Vereinfachen zu (6), (7) und (8)*
- *1 Punkt für das Erschließen von* $x \in \{1, 2, 3\}$
- *1 Punkt für das Erschließen von* $x \in \{1, 3\}$
- *2 Punkte für die vollständige Fallunterscheidung*
- *1 Punkt für die Begründung der Vollständigkeit der Lösung*

Andere Lösungen, die zur Erschließung aller Tripel führen, erhalten ebenfalls 10 Punkte.

Schule:	**Team-Nummer:**	**PUNKTE**

Aufgabe 4: Achtzehneckpuzzle

(Aufgabe (a) : 5 Punkte, (b) : 5 Punkte)



Ein regelmäßiges Achtzehneck ist, so wie es in der Abbildung zu sehen ist, aus achtzehn Puzzleteilen zusammengesetzt worden. Die Puzzleteile haben die Form von Fünfecken und sind alle kongruent zueinander.

(a) Bestimmt (ohne Messen) die Größen aller Innenwinkel eines Puzzleteils.

(b) Beweist, dass die in der Abbildung bezeichneten Punkte X, Y und Z auf einer Geraden liegen.

Bitte beachtet dabei die folgenden Hinweise:

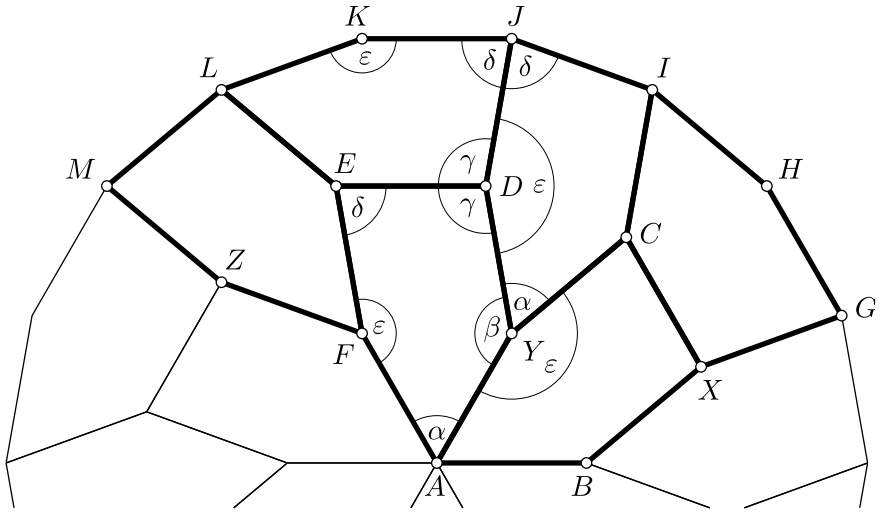
- Ihr könnt auf der Zeichnung Bezeichnungen für Punkte, Winkel etc. eintragen, die ihr dann in eurer Lösung benutzt. Eure Lösungen und Begründungen müsst ihr aber schriftlich auf der Rückseite und/oder dem nächsten Blatt darstellen.
- Ausmessen von Winkeln und Zeichnen von Geraden zählen nicht als Beweis.
- Bei einem regelmäßigen Achtzehneck sind alle Seiten gleich lang und alle Innenwinkel gleich groß.
- Falls ihr die Größe der Innenwinkel eines regelmäßigen Achtzehnecks nicht anders ermitteln könnt, so stellt euch vor, dass ihr einmal am Rand des Achtzehnecks herumlauft. Um wie viel Grad habt ihr euch gedreht, wenn ihr einmal ganz herumgelaufen seid?

Benutzt für die Lösung bitte die Rückseite und das folgende Blatt.

(a) Es gibt recht viele verschiedene Möglichkeiten, die gesuchten Winkel zu bestimmen. Bezeichnet man die Innenwinkel des Fünfecks wie in der Abbildung unten, so ist

$$\alpha = 60°, \quad \beta = 140°, \quad \gamma = 100°, \quad \delta = 80°, \quad \varepsilon = 160°.$$

Zur Darstellung einer möglichen Herleitung dieser Winkelgrößen bezeichnen wir zusätzlich wie im Bild unten einige der Eckpunkte der Puzzleteile mit $A, B, \ldots, M$.



Wegen der Kongruenz der Puzzleteile wird der Vollwinkel um den Punkt A in sechs gleich große Teile zerlegt, weswegen $6 \cdot \alpha = 360°$ und daher

$$\alpha = 60°$$

ist.

Die Innenwinkelsumme eines n-Ecks ist $(n-2) \cdot 180°$. Im Achtzehneck ist sie also $16 \cdot 180°$, die Größe *eines* Innenwinkels ist also $(16 \cdot 180° : 18 =)\, 160°$. In der Zeichnung sieht man bei Punkt K, dass dieser Winkel gerade ε ist; somit ist

$$\varepsilon = 160°.$$

Alternativ kann ε auch mithilfe des Hinweises in der Aufgabe bestimmt werden: Läuft man einmal am Rand des Achtzehnecks herum, so hat man sich um 360° gedreht, also 18 mal um 20°, woraus sich $\varepsilon = 180° - 20° = 160°$ ergibt.

Für den Innenwinkel des Achtzehnecks beim Eckpunkt J gilt $2 \cdot \delta = \varepsilon$. Aus $\varepsilon = 160°$ folgt daher

$$\delta = 80°.$$

Für den Vollwinkel um den Punkt Y gilt $\alpha + \beta + \varepsilon = 360°$. Mit den bereits bekannten Werten von α und ε folgt daher

$$\beta = 140°.$$

Für den Vollwinkel um den Punkt D gilt $2 \cdot \gamma + \varepsilon = 360°$, es folgt also schließlich

$$\gamma = 100°.$$

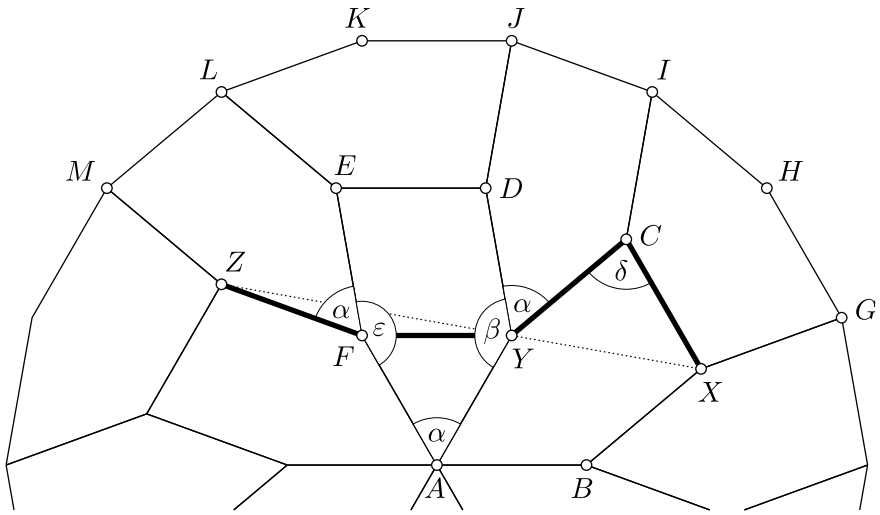
Bepunktungsvorschlag zu (a):

Insgesamt 5 Punkte: Pro richtiger Winkelgröße gibt es einen halben Punkt, pro richtiger Argumentation auch einen halben Punkt.
Das Gesamtergebnis der Aufgabe wird aber so aufgerundet, dass sich eine ganzzahlige Punktzahl ergibt.

(b) Zum Beweis der Behauptung zeigen wir, dass $|\sphericalangle XYZ| = 180°$ gilt. Dazu nutzen wir, dass

$$|\sphericalangle XYZ| \quad = \quad |\sphericalangle XYC| + |\sphericalangle CYD| + |\sphericalangle DYF| - |\sphericalangle ZYF| \tag{9}$$

gilt, siehe die folgende Abbildung, und bestimmen die vier Winkelgrößen auf der rechten Seite der Gleichung.



Nach Teil (a) gelten

$$|\sphericalangle YCX| = \delta = 80° \tag{10}$$

und

$$|\sphericalangle CYD| = |\sphericalangle YAF| = |\sphericalangle EFZ| = \alpha = 60°. \tag{11}$$

Die Seiten $\overline{AY}, \overline{AF}$ und $\overline{FZ}$ sind einander entsprechende Seiten in den zueinander kongruenten Fünfecken $ABXCY, AYDEF$ und $FELMZ$. Somit gilt

$$|AY| = |AF| = |FZ|. \tag{12}$$

Daher ist das Dreieck AYF gleichschenklig und wegen $\alpha = 60°$ nach Basis- und Innenwinkelsatz sogar gleichseitig. Daher gelten

$$|\sphericalangle FYA| = |\sphericalangle AFY| = 60° \tag{13}$$

und

$$|FY| = |AF| = |AY|. \tag{14}$$

Mit $|\sphericalangle DYA| = \beta = 140°$ und (13) erhalten wir

$$|\sphericalangle DYF| = |\sphericalangle DYA| - |\sphericalangle FYA| = 140° - 60° = 80°. \tag{15}$$

Mit $\varepsilon = 160°$ (aus (a)) und (13) folgt

$$\begin{aligned} |\sphericalangle YFZ| &= |\sphericalangle YFE| + |\sphericalangle EFZ| = (|\sphericalangle AFE| - |\sphericalangle AFY|) + |\sphericalangle EFZ| \\ &= (\varepsilon - |\sphericalangle AFY|) + \alpha \\ &= 160° - 60° + 60° = 160°. \end{aligned} \tag{16}$$

Wegen (14) und (12) ist $|FY| = |FZ|$; das Dreieck FYZ ist also gleichschenklig. Aus (16) sowie nach Basis- und Innenwinkelsatz folgt daher

$$|\sphericalangle ZYF| = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - |\sphericalangle YFZ|) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 160^\circ) = 10^\circ. \tag{17}$$

Die Seiten $\overline{AY}$ und $\overline{CY}$ sowie $\overline{AF}$ und $\overline{DY}$ sind einander entsprechende Seiten in den zueinander kongruenten Fünfecken $AYDEF$ und $YCIJD$. Wegen (14) gilt daher

$$|AY| = |CY| = |DY|.$$

Die Seiten $\overline{DY}$ und $\overline{CX}$ sind einander entsprechende Seiten in den zueinander kongruenten Fünfecken $AYDEF$ und $ICXGH$. Daher gilt

$$|CX| = |DY|.$$

Diese letzten beiden Gleichungen ergeben

$$|CX| = |CY|,$$

also ist das Dreieck CYX gleichschenklig. Aus (10) und nach Basis- und Innenwinkelsatz folgt daher

$$|\sphericalangle XYC| = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - |\sphericalangle YCX|) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 80^\circ) = 50^\circ. \tag{18}$$

Aus (18), (11), (15) und (17) folgt schließlich

$$\begin{aligned} |\sphericalangle XYZ| &= |\sphericalangle XYC| + |\sphericalangle CYD| + |\sphericalangle DYF| - |\sphericalangle ZYF| \\ &= 50^\circ + 60^\circ + 80^\circ - 10^\circ \\ &= 180^\circ. \end{aligned}$$

Folglich liegen die Punkte X, Y und Z auf einer Geraden.

Bepunktungsvorschlag zu (b):

Insgesamt 5 Punkte:

- *Idee, die Behauptung auf Winkel zurückzuführen: 1 Punkt*
- *Zielführendes Berechnen von Winkeln: 4 Punkte*