Zauberkunststücke mit mathematischem Hintergrund

Ehrhard Behrends

Freie Universität Berlin

Tag der Mathematik in Cottbus, 6. 5. 2023

Mein Weg in die Zauberei:

Mein Weg in die Zauberei:

Besuche bei den „Berliner Zauberfreunden“ seit 2013.

Mein Weg in die Zauberei:

Besuche bei den „Berliner Zauberfreunden“ seit 2013.
Aufnahmeprüfung im „Magischen Zirkel von Deutschland“ im Januar 2015.

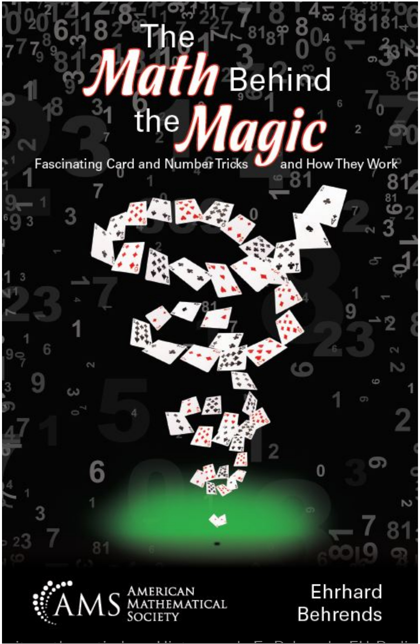
Mein Weg in die Zauberei:

Besuche bei den „Berliner Zauberfreunden“ seit 2013.

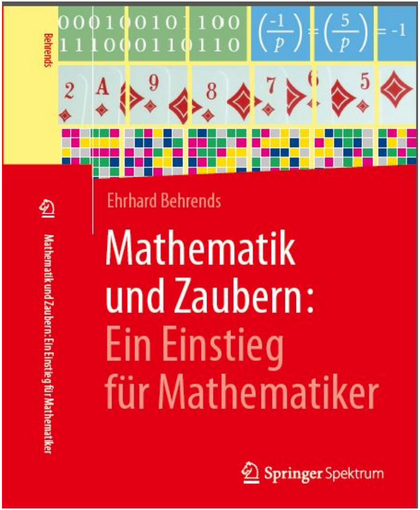
Aufnahmeprüfung im „Magischen Zirkel von Deutschland“ im Januar 2015.

Ein (eher populäres) Buch zum Thema „Mathematik und Zaubern“: „Der mathematische Zauberstab“ (Rowohlt, Dezember 2015)

... das gibt es inzwischen auch auf Englisch:



Das für Mathematiker geschriebene Buch
„Mathematik und Zaubern – Ein Einstieg für Mathematiker“
(15 Kapitel, Springer Spektrum, 7/2017).



Die Übersicht:

- Zaubern und Mathematik: Ein typisches Beispiel
- 1089
- Das Geheimnis der 9
- Invarianten I
- Invarianten II
- Gilbreath
- Fibonacci zaubert
- Chaos und Ordnung
- Ich gewinne fast immer ...

Zaubern und Mathematik: Ein typisches Beispiel

Ein sehr elementarer Einstieg in unser Thema ist das folgende Zauberkunststück.
Ein Zuschauer wählt eine dreistellige Zahl, die schreibt er – für alle sichtbar – auf. Die gleiche Zahl wird noch einmal daneben geschrieben („damit es etwas anspruchsvoller wird"), aus xyz wird also $xyz\,xyz$. Diese sechsstellige Zahl wird nun durch die Glückszahl 7 geteilt, und es wird versprochen, den Rest, der beim Teilen übrig bleibt, in 10-Euro-Scheinen auszuzahlen.

Mal angenommen, der Zuschauer hat die Zahl 453 gewählt. Dann wird so gerechnet:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
4 & 5 & 3 & 4 & 5 & 3 & : & 7 & = & 6 & 4 & 7 & 7 & 9 & \text{Rest } 0 \\
4 & 2 & & & & & & & & & & & & & \\
 & 3 & 3 & & & & & & & & & & & & \\
 & 2 & 8 & & & & & & & & & & & & \\
 & & 5 & 4 & & & & & & & & & & & \\
 & & 4 & 9 & & & & & & & & & & & \\
 & & & 5 & 5 & & & & & & & & & & \\
 & & & 4 & 9 & & & & & & & & & & \\
 & & & & 6 & 3 & & & & & & & & & \\
 & & & & 6 & 3 & & & & & & & & & \\
 & & & & & 0 & & & & & & & & &
\end{array}$$

Der Rest ist also Null, und das wäre er auch bei jeder andern Wahl des Zuschauers gewesen. Die Erklärung ist einfach, man muss nur die folgenden Tatsachen miteinander kombinieren:

- $xyz\,xyz$ ist gleich $1001 \cdot xyz$.

Der Rest ist also Null, und das wäre er auch bei jeder andern Wahl des Zuschauers gewesen. Die Erklärung ist einfach, man muss nur die folgenden Tatsachen miteinander kombinieren:

- $xyz\,xyz$ ist gleich $1001 \cdot xyz$.
- $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, und deswegen hat $xyz\,xyz$ (mindestens) die Teiler $7, 11, 13$ (und $7 \cdot 11, \ldots$)

Der Rest ist also Null, und das wäre er auch bei jeder andern Wahl des Zuschauers gewesen. Die Erklärung ist einfach, man muss nur die folgenden Tatsachen miteinander kombinieren:

- $xyz\,xyz$ ist gleich $1001 \cdot xyz$.
- $1001 = 7 \cdot 11 \cdot 13$, und deswegen hat $xyz\,xyz$ (mindestens) die Teiler $7, 11, 13$ (und $7 \cdot 11, \ldots$)

Wenn man das Prinzip verstanden hat, kann man auf die Suche nach Varianten gehen. Man könnte statt durch 7 also auch durch 11 oder 13 teilen lassen, doch für ein Zauberkunststück vor mathematischen Laien sollte man beim Teiler 7 bleiben.

Auch könnte man dreistellige Zahlen durch Zahlen mit einer anderen Ziffernanzahl ersetzen. Zweistellige Zahlen scheiden aus, denn das führt auf die Multiplikation mit 101, und das ist eine Primzahl.
Bei vierstelligen Zahlen werden die Teiler von $10001 = 73 \cdot 137$ interessant, die sind leider zu groß zum Zaubern.
Erst bei neunstelligen Zahlen gibt es wieder kleine Teiler, denn

$$1000000001 = 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 52579.$$

Da dürfte der Trick aber zu lange dauern ...

Das Prinzip ist bei den in diesem Vortrag vorgestellten anspruchsvolleren Beispielen das gleiche: Es passiert etwas Unerwartetes, und das liegt an einem mehr oder weniger gut versteckten mathematischen Ergebnis.

Die mysteriöse Zahl 1089

Ein Mitspieler wählt eine dreistellige Zahl, etwa $abc = 452$. Die wird gespiegelt, und dann wird die kleinere von der größeren abgezogen: $def = abc - cba$, im Beispiel ist $def = 452 - 254 = 198$.

Die mysteriöse Zahl 1089

Ein Mitspieler wählt eine dreistellige Zahl, etwa $abc = 452$. Die wird gespiegelt, und dann wird die kleinere von der größeren abgezogen: $def = abc - cba$, im Beispiel ist $def = 452 - 254 = 198$. Nun def spiegeln und zu def addieren: $198 + 891 = 1089$.

Die mysteriöse Zahl 1089

Ein Mitspieler wählt eine dreistellige Zahl, etwa $abc = 452$. Die wird gespiegelt, und dann wird die kleinere von der größeren abgezogen: $def = abc - cba$, im Beispiel ist $def = 452 - 254 = 198$. Nun def spiegeln und zu def addieren: $198 + 891 = 1089$.

Und das passiert bei jeder Wahl von abc**!**

Die mysteriöse Zahl 1089

Ein Mitspieler wählt eine dreistellige Zahl, etwa $abc = 452$. Die wird gespiegelt, und dann wird die kleinere von der größeren abgezogen: $def = abc - cba$, im Beispiel ist $def = 452 - 254 = 198$. Nun def spiegeln und zu def addieren: $198 + 891 = 1089$.

Und das passiert bei jeder Wahl von *abc*!

Und warum ist das so? Man muss nur den Rechenvorgang analysieren. Zum Beispiel ist das e, die zweite Ziffer von def, garantiert gleich 9. Denn bei der Berechnung der letzten Ziffer war $c - a$ auszurechnen; das ist negativ, es gab also einen einen Übertrag von 1; und e entsteht als „$b - b$ - Übertrag“.

Die mysteriöse Zahl 1089

Ein Mitspieler wählt eine dreistellige Zahl, etwa $abc = 452$. Die wird gespiegelt, und dann wird die kleinere von der größeren abgezogen: $def = abc - cba$, im Beispiel ist $def = 452 - 254 = 198$. Nun def spiegeln und zu def addieren: $198 + 891 = 1089$.

Und das passiert bei jeder Wahl von *abc*!

Und warum ist das so? Man muss nur den Rechenvorgang analysieren. Zum Beispiel ist das e, die zweite Ziffer von def, garantiert gleich 9. Denn bei der Berechnung der letzten Ziffer war $c - a$ auszurechnen; das ist negativ, es gab also einen einen Übertrag von 1; und e entsteht als „$b - b$ - Übertrag“.

Wenn man mit mehr als drei Ziffern startet, kommen überraschender Weise die Fibonaccizahlen ins Spiel.

Das Geheimnis der 9

Hier machen wir uns zwei Tatsachen zunutze: *Erstens* ist bei jeder Zahl die Differenz „Zahl minus gespiegelte Zahl“ durch Neun teilbar. (Es soll die kleinere von der größeren abgezogen werden.)

Das Geheimnis der 9

Hier machen wir uns zwei Tatsachen zunutze: *Erstens* ist bei jeder Zahl die Differenz „Zahl minus gespiegelte Zahl“ durch Neun teilbar. (Es soll die kleinere von der größeren abgezogen werden.) Ist die Zahl *abcd* zum Beispiel vierstellig, so ist doch – ausführlich geschrieben –,

$$1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+a) = 999a+90b-90c-999d$$

auszurechnen. Und auf der rechten Seite sind alle Summanden durch 9 teilbar. Und *zweitens* hat eine durch 9 teilbare Zahl die Quersumme 9.

Das Geheimnis der 9

Hier machen wir uns zwei Tatsachen zunutze: *Erstens* ist bei jeder Zahl die Differenz „Zahl minus gespiegelte Zahl“ durch Neun teilbar. (Es soll die kleinere von der größeren abgezogen werden.) Ist die Zahl *abcd* zum Beispiel vierstellig, so ist doch – ausführlich geschrieben –,

$$1000a+100b+10c+d-(1000d+100c+10b+a) = 999a+90b-90c-999d$$

auszurechnen. Und auf der rechten Seite sind alle Summanden durch 9 teilbar. Und *zweitens* hat eine durch 9 teilbare Zahl die Quersumme 9.

Hier ist das zugehörige Zauberkunststück. Der Zauberer schaut weg. Ein Mitspieler sucht sich eine vierstellige Zahl *abcd*, berechnet $efgh = abcd - dcba$ und schreibt das Ergebnis *efgh* auf ein Blatt Papier. Doch Achtung: Für eine der Ziffern schreibt er einfach ein „?“. Der Zauberer kommt dazu und sieht, zum Beispiel, ?907. Er sagt sofort, dass das „?“ eigentlich eine 2 sein müsste, denn nur so wird eine durch 9 teilbare Quersumme erreicht.

Das kann man natürlich spektakulärer präsentieren. Zum Beispiel dadurch, dass man die Differenz *efgh* mit Spielkarten auslegen lässt und dann eine dieser Karten umdreht. (Da muss man natürlich vorher festlegen, wie die Eins und die Null dargestellt werden sollen. Zum Beispiel durch ein Ass bzw. durch eine Bildkarte.)

Es ist auch zu beachten, dass die Lösung manchmal nicht eindeutig ist. Zum Beispiel könnte sich hinter „?“ in 59?4 sowohl eine 9 als auch eine 0 verbergen.

Invarianten I

Bekanntlich ist eine Invariante bezüglich einer Transformation eine Eigenschaft, die bei diesem Typ Transformation erhalten bleibt: Die Winkelsumme eines Dreiecks ist eine Invariante bzgl. Bewegungen. Die Lösbarkeit einer Gleichung ist eine Invariante bzgl. Koordinatentransformationen ...

Invarianten I

Bekanntlich ist eine Invariante bezüglich einer Transformation eine Eigenschaft, die bei diesem Typ Transformation erhalten bleibt: Die Winkelsumme eines Dreiecks ist eine Invariante bzgl. Bewegungen. Die Lösbarkeit einer Gleichung ist eine Invariante bzgl. Koordinatentransformationen ...

Für die Zauberei interessieren Invarianten zu speziellen Mischvorgängen von Karten.

Invarianten I

Bekanntlich ist eine Invariante bezüglich einer Transformation eine Eigenschaft, die bei diesem Typ Transformation erhalten bleibt: Die Winkelsumme eines Dreiecks ist eine Invariante bzgl. Bewegungen. Die Lösbarkeit einer Gleichung ist eine Invariante bzgl. Koordinatentransformationen ...

Für die Zauberei interessieren Invarianten zu speziellen Mischvorgängen von Karten.
Ein triviales Beispiel: Die Anzahl der roten Karten in einem Kartenstapel ist eine Invariante bzgl. beliebiger Mischoperationen.

Einfach, aber weniger trivial (und oft verwendet) ist: Beim Abheben bleibt der zyklische Abstand von zwei Karten erhalten.

Dazu ein einfaches Beispiel. Man legt Könige und Damen eines Skatspiels *so* hintereinander, dass die jeweiligen Partner (Karo König und Karo Dame usw.) jeweils den zyklischen Abstand 4 haben. Etwa so:

Der Stapel wird egalisiert, umgedreht und dann beliebig oft von den Zuschauern abgehoben. Für die Zauberin ist es dann leicht, unter gespielter Anstrengung unter einem Tuch oder unter dem Tisch passende Pärchen zu präsentieren.

Invarianten II: Hummer

Der Zauberer zeigt ein Kartenspiel, in dem sich – bildoben gesehen – rote und schwarze Karten abwechseln. Das wird von Zuschauern durcheinandergebracht: mehrfach eine gerade Anzahl von Karten von oben nehmen und umdrehen, beliebig abheben. So sieht es am Anfang aus:

Invarianten II: Hummer

Der Zauberer zeigt ein Kartenspiel, in dem sich – bildoben gesehen – rote und schwarze Karten abwechseln. Das wird von Zuschauern durcheinandergebracht: mehrfach eine gerade Anzahl von Karten von oben nehmen und umdrehen, beliebig abheben. So sieht es am Anfang aus:

So zwischendurch ...

So zwischendurch ...

... und so am Ende, nachdem der Zauberer die Karten noch einmal auf zwei Stapel aufgeteilt hat:

Rote und schwarze Karten zeigen in verschiedene Richtungen!

Beim Hummerkunststück wurde die folgende Invariante eingesetzt:

Die Eigenschaft: Der Kartenstapel besteht aus n roten und n schwarzen Karten. Jede einzelne Karte kann bildoben oder bildunten liegen. Dreht man jede zweite Karte um, so zeigen die roten in die eine und die schwarzen in die andere Richtung. (Dazu: Karten abwechselnd auf zwei Stapel aufteilen, einen umdrehen und auf den anderen legen.)

Die erlaubten Operationen:

- Irgendwo abheben.
- Eine gerade Anzahl von Karten von oben als Paket umdrehen.

Die Eigenschaft ist am Anfang erfüllt, sie ist unter den Operationen invariant , und deswegen darf beliebig oft „durcheinandergebracht“ werden.

Der Gilbreath-Zaubertrick

Was passiert? Der Zauberer präsentiert einen Kartenstapel. Eine Besucherin darf mehrfach abheben, dann werden Karten einzeln heruntergezählt, bis – ungefähr bei der Hälfte der Karten – die Zuschauerin „Stopp!“ sagt. Dann werden die zwei Stapel mit einem möglichst gekonnten „riffle shuffle“ (die Methode der Profispieler) ineinander gemischt.

Es könnte etwa so aussehen (zwei Stapel und das Ergebnis nach dem riffle shuffle (von unten gesehen).

Der Gilbreath-Zaubertrick

Was passiert? Der Zauberer präsentiert einen Kartenstapel. Eine Besucherin darf mehrfach abheben, dann werden Karten einzeln heruntergezählt, bis – ungefähr bei der Hälfte der Karten – die Zuschauerin „Stopp!“ sagt. Dann werden die zwei Stapel mit einem möglichst gekonnten „riffle shuffle“ (die Methode der Profispieler) ineinander gemischt.

Es könnte etwa so aussehen (zwei Stapel und das Ergebnis nach dem riffle shuffle (von unten gesehen).

Der gemischte Stapel hat eine überraschende Eigenschaft: Jedes Kartenpärchen enthält eine rote und eine schwarze Karte!

Die Möglichkeiten, das einzusetzen, sind sehr vielfältig:

- Mühsam unter dem Tisch Pärchen finden.

Die Möglichkeiten, das einzusetzen, sind sehr vielfältig:

- Mühsam unter dem Tisch Pärchen finden.
- Farbe der Karte „riechen“.

Die Möglichkeiten, das einzusetzen, sind sehr vielfältig:

- Mühsam unter dem Tisch Pärchen finden.
- Farbe der Karte „riechen“.
- Lügendetektor
- ...

Die Möglichkeiten, das einzusetzen, sind sehr vielfältig:

- Mühsam unter dem Tisch Pärchen finden.
- Farbe der Karte „riechen“.
- Lügendetektor
- …

Die einzige Vorbereitung: Es muss eine gerade Anzahl von Karten sein, und am Anfang müssen sich die Farben rot-schwarz abwechseln.

Die mathematische Begründung ist leider zu kompliziert, um sie hier in vertretbarer Zeit vermitteln zu können.

Fibonacci zaubert

Die Fibonaccizahlen $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$[1] sind allgegenwärtig. In meinen Arbeiten zur Zauberei tauchten sie mehrfach auf. Es folgt ein weiteres Beispiel.

Ein Zuschauer sucht sich zwei Zahlen aus der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Er erzeugt eine aus 16 Zahlen bestehende Zahlenfolge nach der folgenden Vorschrift: Die jeweils nächste Zahl ist die Summe der beiden vorhergehenden: Ist diese Summe allerdings größer als 7, so wird 7 abgezogen. Hier ist ein Beispiel:

1	3	4	7	4	4	1	5	6	4	3	7	3	3	6	2

Dann soll er die Zahlen addieren. Die Überraschung: Der Zauberer weiß schon vorher, dass – unabhängig von der Wahl der ersten beiden Zahlen – 63 herauskommen wird.

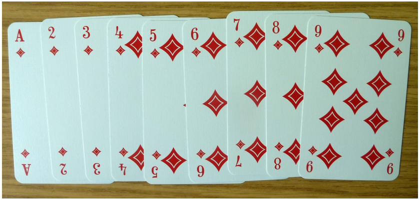
[1] $F_0 = 0, F_1 = 1,\ F_{i+1} = F_i + F_{i-1}$.

Der mathematische Hintergrund ist überraschend schwierig. Zur Erklärung des Phänomens muss man die Fibonaccifolge modulo einer Primzahl analysieren.
Eine Definition aus der Zahlentheorie spielt dabei eine wichtige Rolle:
Es sei p eine Primzahl, alles wird sich in $\mathbb{Z}_p$, dem Körper der Reste modulo p abspielen. Eine Zahl a heißt *quadratischer Rest* modulo p, wenn man ein $b \in \mathbb{Z}_p$ so finden kann, dass $b^2 = a$. Gibt es kein derartiges b, so heißt a *quadratischer Nichtrest*. Ein Beispiel: 2 ist quadratischer Rest modulo 7 (denn $3^2 = 2$), aber 3 ist quadratischer Nichtrest (niemals ist $b^2 = 3$ in $\mathbb{Z}_7$).

Deswegen spielte die Zahl 7 hier eine besondere Rolle.

Chaos und Ordnung

Bei diesem Kunststück wird zuerst ein vollständig geordneter Stapel aus 9 Karten gezeigt:



Der wird von einem Zuschauer durcheinandergebracht (was man zwischendurch auch sehen kann), doch danach ist die perfekte Ordnung wieder hergestellt.

Genauer geht es so. Der Stapel liegt bildunten. Dreimal passiert folgendes: abheben lassen, links-rechts ausgeben, einen Teilstapel auf den anderen legen. Nach dem zweiten Mal kann man die Karten bildunten kurz zeigen: Chaos!

Doch nach dem dritten Mal liegen die Karten wieder in der richtigen zyklischen Reihenfolge. (Vielleicht muss noch einmal abgehoben werden.)

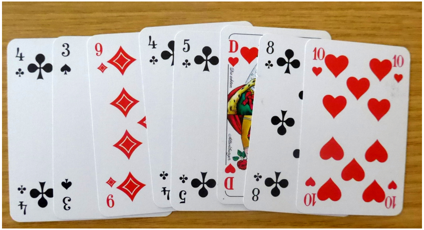
Genauer geht es so. Der Stapel liegt bildunten. Dreimal passiert folgendes: abheben lassen, links-rechts ausgeben, einen Teilstapel auf den anderen legen. Nach dem zweiten Mal kann man die Karten bildunten kurz zeigen: Chaos!

Doch nach dem dritten Mal liegen die Karten wieder in der richtigen zyklischen Reihenfolge. (Vielleicht muss noch einmal abgehoben werden.)

Diesmal spielen *Normalteiler* von Gruppen eine Rolle. Auch das kann hier leider nicht ausgeführt werden.

Ich gewinne fast immer ...

Zauberer und Zuschauer spielen das folgende Spiel: Der Zuschauer wählt ein Farbtripel aus den Farben schwarz und rot, etwa *rsr*. Der Zauberer entscheidet sich auch für ein Tripel, etwa *rrs*. Nun wird ein gut gemischtes Kartenspiel nach und nach aufgedeckt. Derjenige gewinnt diese Runde, dessen Muster zuerst erscheint. Im linken Bild etwa hätte der Zuschauer gewonnen, im rechten der Zauberer:



Sieger ist, wer zuerst 5 Runden für sich entschieden hat.

Überraschender Weise hat der Zauberer *immer* die Möglichkeit, ein Muster so zu wählen, dass seine Gewinnwahrscheinlichkeit über 50 Prozent liegt.

Es gibt nämlich kein bestes Muster!

Sagt man, dass ein Muster abc (mit $a, b, c \in \{r, s\}$) besser als ein Muster def ist, falls abc im Mittel früher erscheint als def, so ist diese Ordnung *nicht transitiv*: Zu jedem abc gibt es ein besseres def. (So ähnlich wie beim Spiel Schere-Stein-Papier.)
Die Wahl für den Zauberer ist auch leicht zu merken: Wählt der Zuschauer abc, so antwortet der Zauberer mit $b'ab$, wobei $r' = s$ und $s' = r$.

Bei 5 Spielrunden liegt die Zauberer-Gewinnwahrscheinlichkeit bei dieser Strategie übrigens schon bei knapp 90 Prozent.

Danke für Ihre Aufmerksamkeit!