

Die Begriffe *physikalisches* und *mathematisches Pendel*, *reduzierte Pendellänge* und *Reversionspendel* werden vermittelt. Mit dem *Reversionspendel* ist die Fallbeschleunigung g mit einer Messunsicherheit kleiner 0,5% zu bestimmen.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Physikalisches und mathematisches Pendel

Ein **physikalisches Pendel** ist ein starrer Körper mit einer im Allgemeinen horizontalen, fest vorgegebenen Drehachse, die nicht durch den Massenmittelpunkt des Körpers geht. Nach einer Auslenkung führt das Pendel unter dem Einfluss der Schwerkraft Schwingungen um seine Ruhelage aus. In den folgenden Überlegungen wird vorausgesetzt, dass die Reibung im Achsenlager vernachlässigbar klein ist.

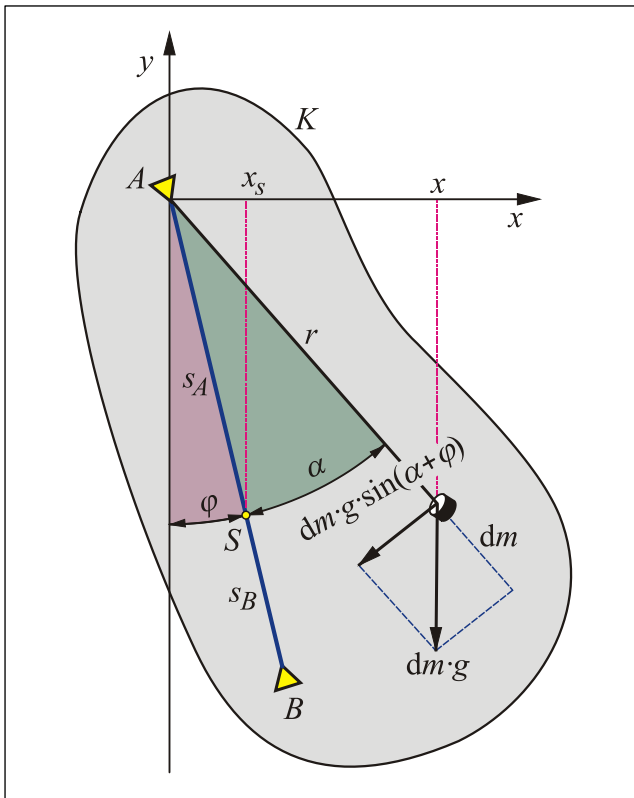


Bild 1: Physikalisches Pendel

Der senkrechte Abstand des Massenmittelpunktes S eines Körpers K von der Drehachse A soll mit s_A bezeichnet werden (**Bild 1**). Ein beliebiges Massenelement dm habe den senkrechten Abstand r von der Achse A . Der zeitlich konstante Winkel zwischen r und s_A sei α . Bildet s_A mit der Vertikalen den Winkel φ , so lautet die Bewegungsgleichung (1) für das Massenelement

$$dm \cdot r \cdot \ddot{\varphi} = -dm \cdot g \cdot \sin(\alpha + \varphi)$$

Durch Multiplikation von Gleichung (1) mit dem Kraftarm r und anschließende Integration über den gesamten Körper K erhält man die Drehmomentengleichung

$$\int_m \ddot{\varphi} \cdot r^2 \cdot dm = -g \cdot \int_m r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot dm \quad (2)$$

Da der Körper starr sein soll, ist die Winkelbeschleunigung $\ddot{\varphi}$ für alle Massenelemente gleich und kann vor das Integral geschrieben werden. Die Größe

$$J_A = \int_m r^2 \cdot dm \quad (3)$$

ist das **Massenträgheitsmoment** des Körpers, bezogen auf die Achse A .

Nach der Definition des **Massenmittelpunktes** gilt für seine Koordinate x_S

$$m \cdot x_S = \int_m r \cdot \sin(\alpha + \varphi) \cdot dm = \int_m x \cdot dm = m \cdot s_A \cdot \sin \varphi ; \quad (4)$$

m : Masse des Pendels

Mit den Gleichungen (3) und (4) kann man Gleichung (2) schreiben:

$$\ddot{\varphi} = - \frac{m \cdot s_A \cdot g}{J_A} \cdot \sin \varphi \quad (5)$$

Die Größe

$$D_A = m \cdot s_A \cdot g \quad (6)$$

hat die Dimension eines Drehmomentes und wird als **Direktionsmoment des Pendels** bezeichnet.

Das **mathematische Pendel** stellt eine Idealisierung dar. Man denkt sich die gesamte Masse im Massenmittelpunkt S vereinigt und sieht die Bindung an die Drehachse A als masselos an. Dieser Idealisierung entspricht näherungsweise das Fadenpendel, das aus einer Metallkugel besteht, die an einem dünnen Faden der Länge l aufgehängt ist. Die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels lautet

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

oder
$$\ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \cdot \sin \varphi \quad (7)$$

Die Gleichungen (5) und (7), deren Lösungen elementar nicht möglich sind, vereinfachen sich, wenn man nur sehr kleine Auslenkungen $|\varphi| \ll 1$ zulässt. Dann kann man den Sinus durch das Argument ersetzen und erhält

$$\ddot{\varphi} = - \frac{m \cdot s_A \cdot g}{J_A} \cdot \varphi, \quad (5a)$$

$$\ddot{\varphi} = - \frac{g}{l} \cdot \varphi. \quad (7a)$$

Die Bewegungsgleichungen (5a) und (7a) sind vom Typ

$$\ddot{\varphi} = -\omega^2 \cdot \varphi. \quad (8)$$

mit der Eigenkreisfrequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$; T : Schwingungsdauer

für das Fadenpendel

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (9)$$

für das physikalische Pendel

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot s_A \cdot g}} \quad (10)$$

Die Lösung von Gleichung (8) lautet:

$$\varphi = c_1 \cdot \cos \omega_0 \cdot t + c_2 \cdot \sin \omega_0 \cdot t. \quad (11)$$

Die Konstanten c_1 und c_2 sind aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen. Dem Versuchsbeginn entsprechen $\varphi(t=0) = \varphi_0$, $\dot{\varphi}(t=0) = 0$. Damit lautet die Gleichung (11)

$$\varphi = \varphi_0 \cdot \cos \omega_0 \cdot t = \varphi_0 \cdot \cos \left(2\pi \cdot \frac{t}{T} \right). \quad (11a)$$

1.2 Reduzierte Pendellänge

Durch den Vergleich der Gleichungen (9) und (10) ergibt sich, dass ein physikalisches Pendel die gleiche Schwingungsdauer wie ein mathematisches Pendel der Fadenlänge

$$l_{A,red} = \frac{J_A}{m \cdot s_A} \quad (12)$$

hat. $l_{A,red}$ ist die der Achse A entsprechende reduzierte Pendellänge.

Gegeben sei ein physikalisches Pendel mit den parallelen Drehachsen A und B (**Bild 1**). Der Massenmittelpunkt soll auf der Geraden von A nach B liegen, und der Achsenabstand sei $l_{AB} = s_A + s_B$.

Es soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen die Schwingungsdauern um diese beiden Achsen übereinstimmen. Aus

$$T_A = T_B$$

$$2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_A}{m \cdot s_A \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J_B}{m \cdot s_B \cdot g}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l_{A,red}}{g}}$$

folgt bei Verwendung des Steinerschen Satzes $J_S = J_A - m \cdot s_A^2 = J_B - m \cdot s_B^2$:

$$\begin{aligned} l_{A,red} &= \frac{J_B}{m \cdot s_B} \\ &= \frac{J_S + m \cdot (l_{AB} - s_A)^2}{m \cdot (l_{AB} - s_A)} \\ &= \frac{J_A + (m \cdot l_{AB}^2) - (2m \cdot l_{AB} \cdot s_A)}{m \cdot (l_{AB} - s_A)} \\ &= \frac{(m \cdot l_{A,red} \cdot s_A) + (m \cdot l_{AB}^2) - (2m \cdot l_{AB} \cdot s_A)}{m \cdot (l_{AB} - s_A)} \end{aligned}$$

$$\text{oder} \quad l_{AB}^2 - (l_{A,red} + 2s_A) \cdot l_{AB} + 2l_{A,red} \cdot s_A = 0 \quad (13)$$

Die quadratische Gleichung (13) kann

$$(l_{AB} - l_{A,red}) \cdot (l_{AB} - s_A) = 0 \quad (14)$$

geschrieben werden.

Ist $l_{AB} \neq 2s_A$, so muss $l_{AB} = l_{A,red}$ sein, d. h., der Achsenabstand, bei dem die Schwingungsdauern gleich sind, ist gleich der reduzierten Pendellänge.

Ist jedoch $l_{AB} = 2s_A$, d. h., der Massenmittelpunkt halbiert die Verbindungslinie der beiden Achsen, ist der Schluss $l_{AB} = l_{A,red}$ falsch.

1.3 Reversionspendel

Das Reversionspendel besteht im Allgemeinen aus einem Stab, der um zwei parallele Achsen A und B gedreht werden kann (**Bild 2**). Die Achsen haben den fest vorgegebenen Abstand l_{AB} . Zwischen den Achsen befindet sich ein Laufgewicht L der Masse m_L . Durch Verschieben von L lässt sich die Schwingungsdauer des Pendels innerhalb gewisser Grenzen variieren. In der Nähe des einen Stabendes ist ein Zusatzkörper K (Masse m_K) angebracht. Wenn m_K hinreichend groß gegen m_L ist, kann man den Abstand y so wählen, dass für jede mögliche Lage des Laufgewichtes ($0 < x < l$)

$$0 < s_A < \frac{1}{2}l \quad (15)$$

ist. Wenn bei einer bestimmten Stellung x des Laufgewichtes die Schwingungsdauer um die Achse A gleich der um die Achse B ist, dann entspricht der Achsenabstand l_{AB} der reduzierten Pendellänge. Setzt man

$$T_A = T_B = T, \quad (16)$$

gilt für die Schwerebeschleunigung

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot l_{AB} \quad (17)$$

unabhängig von weiteren Eigenschaften des Pendels.

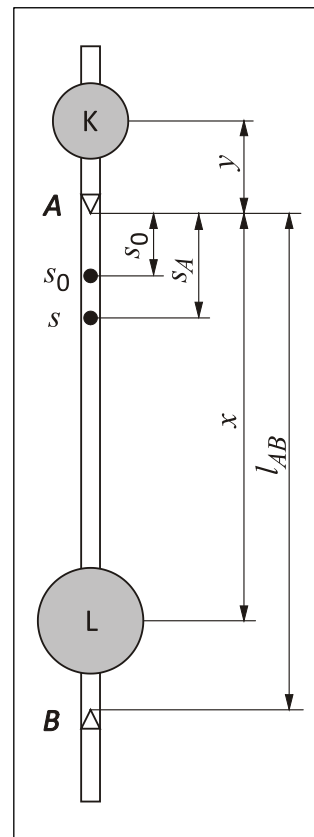


Bild 2: Reversionspendel

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Berechnen Sie den Wert für die Fallbeschleunigung in Senftenberg.

Für die Fallbeschleunigung g in Meeresniveau ($g_0 = 9,78033 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) bei der geografischen Breite Φ existiert eine Anpassung an die Messwerte der Form:

$$g(\Phi) = g_0 \cdot (1 + 0,0053 \cdot \sin^2 \Phi).$$

In Abhängigkeit von der Höhe h über dem Meeresspiegel erhält man

$$g(\Phi, h) = g(\Phi) \cdot \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

Daten für Senftenberg:

geografischen Breite Φ : $51^\circ 31' 20''$
 Höhe h über Meerspiegel : 103 m
 Erdradius R_E in Äquatornähe : $6,378 \cdot 10^3 \text{ km}$

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Reversionspendel mit $l_{AB} = (993,90 \pm 0,15)$ mm, Lichtschranke mit Zähler, Stoppuhr, mathematisches Pendel

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Schwingungsdauer T_A als Funktion der Massenverteilung

- Messen Sie an einem physikalischen Pendel (*Reversionspendel nach Bild 2, an der Schneide A aufgehängt*) die Schwingungsdauer T_A als Funktion der Massenverteilung.
- Überprüfen Sie die Positionierung des Zusatzkörpers K bei $y=25$ cm.

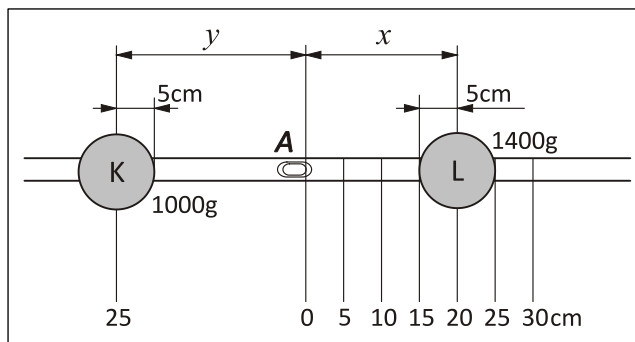


Bild 3: Hilfsskizze zur Positionierung von K und L

- Verändern Sie die Lage des Laufgewichtes L schrittweise **in 5 cm-Schritten (x)** bis zum Ende der Messstrecke und messen Sie jeweils die Schwingungsdauer T_A .
- Verwenden Sie zur Messung der Schwingungsdauer eine Lichtschranke mit Zähler.
- Wählen Sie dabei eine Betriebsart, die eine Zeitmessung zwischen der ersten und der dritten Abschattung erlaubt und damit die Schwingungsdauer T_A misst.
- Bringen Sie den Betriebsartenschalter in Stellung „“.
- Nach dem Drücken der „**SET**“-Taste sind 4 Dezimalpunkte eingeschaltet, die Messung ist somit vorbereitet.
- Lenken Sie das Pendel soweit aus, dass es zur Aufnahme von jeweils **mindestens 10 Messwerten** reicht.
- Betätigen Sie nach jeder Messwertaufnahme erneut die „**SET**“-Taste.
- Überprüfen Sie die Messwerte auf Plausibilität und wiederholen Sie diese gegebenenfalls.

Aufgabe 2: Bestimmung der Fallbeschleunigung g mit dem Reversionspendel

- Hängen Sie das Reversionspendel auf Schneide B um.
- Überprüfen Sie die Positionierung der Lichtschranke.
- Die Messungen von T_B erfolgen analog den Messungen von T_A .
- Überprüfen Sie immer wieder die Aufhängung in den Schneiden des Reversionspendels (*gilt auch für Aufgabe 1*)!
- Beachten Sie bei Einstellung der Länge x den Bezugspunkt (*inverse Aufhängung*)!

Aufgabe 3: mathematisches Pendel

- Bauen Sie das mathematische Pendel eigenständig auf und justieren Sie es (*Pendellänge auf Reversionspendellänge l_{AB} einstellen*).
- Messen Sie mit einer Stoppuhr die Zeit t für **20 Perioden** und ermitteln Sie daraus resultierend die Schwingungsdauer T .
- Wiederholen Sie die Messung **fünfmal**.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: physikalisches Pendel

- Berechnen Sie für die kleinsten Werte der Schwingungsdauer T beispielhaft den Mittelwert und die Messabweichung aus systematischem und zufälligem Fehler (*Mittelwert, Standardabweichung, t -Verteilung*).
- Stellen Sie die ermittelten Schwingungsdauern nach der Funktion $T_A = f(x)$ in einem Diagramm graphisch dar und diskutieren Sie die Ergebnisse.
- Weisen Sie nach, dass die Schwingungsdauer T von der Massenverteilung x abhängt, indem Sie eine Tangente parallel zur x-Achse an die Funktion miteinzeichnen. Notieren Sie die Werte $T_{A(min)}$ und $x_{A(T_{A(min)})}$.

Aufgabe 2: Bestimmung der Fallbeschleunigung g mit dem Reversionspendel

- Stellen Sie zur Bestimmung der Schwingungsdauer T nach Gleichung (16) die in **Aufgabe 1** und **Aufgabe 2** ermittelten Messwerte in **einem weiteren Diagramm** die Funktionen $T_A = f(x)$ und $T_B = f(x)$ graphisch dar.
- Wenn Sie genau gearbeitet haben, ergeben die erhaltenen Kurven zwei Schnittpunkte.
- Skalieren Sie die Achsen des Diagramms so, dass Sie die beiden Schnittpunkte an den Achsen so genau wie möglich ablesen können, indem Sie das Diagramm der Funktionen $T_A = f(x)$ und $T_B = f(x)$ nochmal (*nur der interessierende Teil*) skaliert zeichnen.
- Bilden Sie aus diesen beiden Werten abgelesenen Werten den Mittelwert und berechnen Sie nach Gleichung (17) die Fallbeschleunigung g mit Abweichung durch eine Fehlerrechnung.
- Führen Sie den Nachweis einer relativen Messunsicherheit $u(g)/g < 0,5\%$ bei der Bestimmung der Fallbeschleunigung g .

3. Aufgabe: mathematisches Pendel

- Berechnen Sie die Mittelwerte der Zeit t und der Schwingungsdauer T und die Messabweichungen aus systematischem und zufälligem Fehler (*Mittelwert, Standardabweichung, t -Verteilung*).
- Vergleichen Sie die ermittelten Schwingungsdauern T beider Messmethoden (Reversionspendel mit mathematischem Pendel) miteinander.
- Diskutieren Sie die Ergebnisse.

3. Ergänzung

Erste Amplituden-Korrektur:

Für die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels, das um den Winkel φ_0 aus der Ruhelage ausgelenkt wird, gilt:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m \cdot s_A \cdot g}{J_A}} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{25}{256} \sin^6 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right) \quad (18)$$

- Schätzen Sie die zu verwendenden Auslenkungen ab (*beim Versuch*)!

Die folgende **Tabelle 1** veranschaulicht diesen Ausdruck und gibt an, welche Abweichung (18) gegenüber der Näherungsformel (11) bringt:

Amplitudenauslenkung / °	0	1	2	5	10	20	30	45	60	90
Relative Abweichung / %	0	0,0019	0,0076	0,048	0,191	0,764	1,74	3,99	7,32	18,04

Tabelle 1: Abweichung in Abhängigkeit von der Auslenkung