

In vielen Fällen wird bei Betrachtungen zur Mechanik vorausgesetzt, dass Reibungseffekte vernachlässigbar sind. In diesem Versuch spielt aber die Reibung in Flüssigkeiten die zentrale Rolle: Es soll die Viskosität einer Flüssigkeit aus der konstanten Fallgeschwindigkeit einer Kugel bestimmt werden. Weiterhin wird die r^4 -Abhängigkeit des Volumenstromes bei Kapillaren experimentell verifiziert.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Laminare Strömung

Bewegt sich eine Flüssigkeit an der Oberfläche eines festen Körpers vorbei, so hängt die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit vom Abstand zu dieser Oberfläche ab. Unmittelbar an der Grenzfläche haftet eine dünne Flüssigkeitsschicht. Dort geht die Strömungsgeschwindigkeit gegen null, in der Mitte hingegen hat sie ihr Maximum. Bei hinreichend kleinen Strömungsgeschwindigkeiten gleiten benachbarte Flüssigkeitsschichten mit leicht unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbei, ohne ineinander zu verwirbeln. Eine solche Strömungsform heißt laminar.

Die folgenden Ausführungen setzen immer laminare Strömungsverhältnisse voraus.

1.2 Definition der dynamischen Viskosität

Bei der Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit oder ein Gas wirkt auf den Körper eine Reibungskraft, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Ihr Betrag hängt von der Geschwindigkeit, der Geometrie des Körpers und der inneren Reibung des Mediums ab.

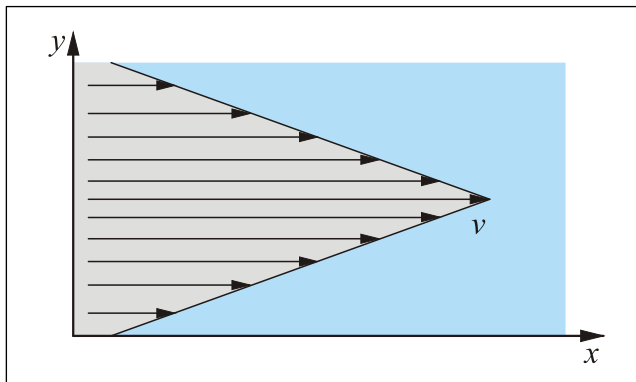


Bild 1: Geschwindigkeitsgefälle in einem viskosen Medium

Betrachtet man beispielsweise eine ebene Platte, die parallel zur Plattenebene in x -Richtung durch eine Flüssigkeit bewegt wird, so haftet die unmittelbar anliegende Flüssigkeitsschicht an ihr und bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit v . Flüssigkeitsschichten in größerem Abstand haben eine geringere Geschwindigkeit. Es entsteht ein Geschwindigkeitsgefälle in y -Richtung, also senkrecht zur Bewegungsrichtung (**Bild 1**).

Die Reibungskraft F_R , die auf die Platte wirkt, ist proportional zur Berührungsfläche A und zu dem Geschwindigkeitsgefälle dv/dy an der Plattenoberfläche.

$$|F_R| = \eta \cdot A \cdot \left| \frac{dv}{dy} \right| \quad (1)$$

Darin ist η eine Materialkonstante, die als **dynamische Viskosität** oder Zähigkeit der umgebenden Flüssigkeit bezeichnet wird. Ihre Einheit ist $[\eta] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. (Eine in der Literatur noch häufig zu findende ältere Einheit ist $1 \text{ Poise} = 1 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.)

Das Verhältnis von dynamischer Viskosität zur Dichte ρ bezeichnet man als **kinemat. Viskosität** ν_{kin}

$$\nu_{kin} = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

Ihre Einheit ist $[\nu_{kin}] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (Frühere Einheit ist das Stokes $[\nu_{kin}] = \text{St} = 1 \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)

Die Viskosität einer Flüssigkeit nimmt mit wachsender Temperatur T ab. Meist gilt mit guter Näherung

$$\eta(T) = a \cdot e^{b/T} \quad (3)$$

wobei a und b empirisch zu bestimmende Konstanten sind.

1.3 Das Stokessche Gesetz

Verwendet man statt der Platte eine Kugel mit dem Radius r , die man mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine viskose Flüssigkeit bewegt, so ist die Reibungskraft, die auf die Kugel wirkt (**Stokessches Gesetz**):

$$F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (4)$$

Fällt die Kugel unter dem Einfluss ihrer Gewichtskraft durch die Flüssigkeit, so verschwindet nach hinreichend langer Zeit mit $v=\text{konst.}$ die Summe aus Gewichtskraft, Auftriebskraft und Stokesscher Reibungskraft:

$$6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v + \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_{Fl} - \rho_K) = 0 \quad (5)$$

ρ : Dichte der Flüssigkeit bzw. der Kugel

Mit Gleichung (5) wird die Viskosität der Flüssigkeit ermittelt:

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g}{v} \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \quad (6)$$

Die Fallgeschwindigkeit v wird dabei aus der Fallstrecke s und der Fallzeit t ermittelt:

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot \frac{t}{s} \quad (7)$$

Notwendige Korrekturen

Die Gleichung (4) ist in der Praxis zu korrigieren, da die Annahme einer unendlich ausgedehnten Flüssigkeit unrealistisch ist und die Geschwindigkeitsverteilung der Flüssigkeitsteilchen relativ zur Kugeloberfläche von den endlichen Abmessungen der Flüssigkeit beeinflusst wird. So gilt für die Bewegung der Kugel längs der Achse eines unendlich langen Flüssigkeitszylinders mit dem Radius R_Z

$$F_1 = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \cdot \left(1 + 2,4 \cdot \frac{r}{R_Z}\right) \quad (8)$$

Gleichung (7) erhält damit die Form

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot r^2 \cdot g \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot \frac{t}{s} \cdot \frac{1}{1 + 2,4 \cdot \frac{r}{R_Z}} \quad (9)$$

Berücksichtigt man die endliche Länge l des Flüssigkeitszylinders, so kommen weitere Korrekturen der Größenordnung r/l hinzu.

1.4 Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Die Flüssigkeitsströmung in einem Rohr wird durch eine Druckdifferenz zwischen den beiden Rohrenden verursacht. Der Verlauf der Kennlinie im Volumenstrom–Druck–Diagramm wird durch die Eigenschaften der Flüssigkeit und durch die geometrischen Abmessungen des Rohres bestimmt. Die Strömung ist bei kleinen Strömungsgeschwindigkeiten laminar und wird bei großen Geschwindigkeiten turbulent (*Abknicken der Kennlinie*). In einem Rohr haftet die Flüssigkeit an der Wand und fließt in der Mitte am schnellsten. Diese Betrachtungen führen ebenfalls zur Gleichung (1), wenn es sich um eine Newtonsche Flüssigkeit handelt. Bei dieser ist die Schubspannung proportional zum entstehenden Geschwindigkeitsgefälle entsprechend der Gleichung (1).

Wie **Bild 2** zeigt, treten bei Wasser sehr leicht Turbulenzen auf, während Glycerin eine ideale Newtonsche Flüssigkeit ist. Wegen seiner großen Viskosität ($\eta = 1,5 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-2}$ bei 20°C) ist der Volumenstrom jedoch sehr klein. Für die Messung wird daher ein Glycerin-Wasser-Gemisch benutzt.

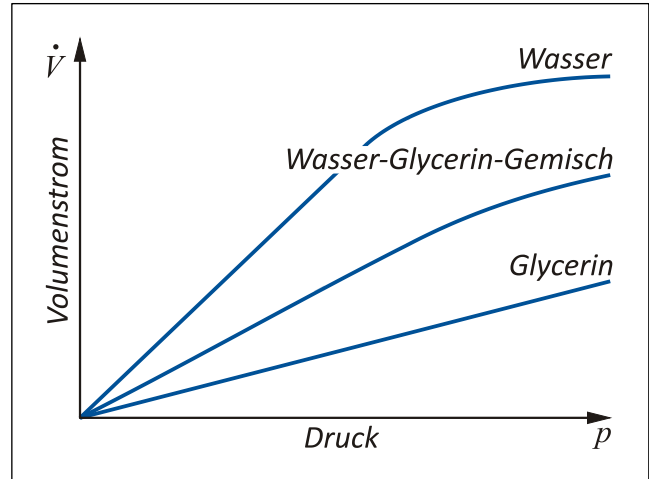


Bild 2: Prinzipieller Kennlinienverlauf

Gesucht wird der Volumenstrom $\Delta V / \Delta t$ durch eine Röhre der Länge l , an deren beiden Enden die Drücke p_1 bzw. p_2 herrschen.

Dazu wird in der Röhre ein axialer Flüssigkeitsfaden mit dem Radius r betrachtet. Aufgrund der Druckdifferenz wirkt auf ihn die Kraft

$$F_T = (p_2 - p_1) \cdot \pi \cdot r^2. \quad (10)$$

Weiterhin wirkt nach Gleichung (1) auf die Mantelfläche des Fadens die Reibungskraft

$$F_R = 2\eta \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr}. \quad (11)$$

Bei stationärer Strömung verschwindet die Summe der beiden Kräfte und es ergibt sich

$$2\eta \cdot l \cdot \frac{dv}{dr} = -(p_2 - p_1) \cdot r \quad (12)$$

Man erhält $v(r)$ durch Integration über r , wobei die Randbedingung $v=0$ für $r=R$ zu berücksichtigen ist. Das Ergebnis der Integration ist:

$$v(r) = \frac{(R^2 - r^2)}{4\eta \cdot l} \cdot (p_2 - p_1) \quad (13)$$

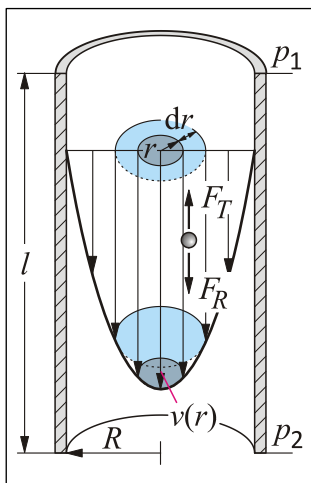


Bild 3: Laminare Rohrströmung

Eine stationäre laminare Strömung in einer Röhre besitzt also ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil (**Bild 3**).

Der Volumenstrom über den gesamten Querschnitt der Röhre beträgt

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_0^r 2\pi \cdot r \cdot v(r) \cdot dr = \frac{\pi \cdot R^4}{8\eta \cdot l} \cdot (p_2 - p_1). \quad (14)$$

Die Gleichung (11) wird als **Hagen-Poiseuillesches Gesetz** bezeichnet. Von besonderer praktischer Bedeutung für die Dimensionierung von Rohrquerschnitten ist darin die Abhängigkeit des Volumenstroms von der 4. Potenz des Radius der Röhre.

1.5 Die Reynoldssche Zahl

Ob die Strömung einer Flüssigkeit laminar ist oder ob es zu Wirbelbildungen (*turbulente Strömung*) kommt, hängt von dem Verhältnis zwischen den Trägheitskräften F_T der strömenden Flüssigkeit und den Reibungskräften F_R ab. Bei einer Kapillare wird dieses Verhältnis durch die Reynoldssche Zahl Re beschrieben. Sie ist wie folgt definiert:

$$Re = \varrho \cdot r \cdot \frac{v}{\eta}. \quad (15)$$

Der Volumenstrom $\Delta V / \Delta t$ ist durch die Strömungsgeschwindigkeit v bestimmt:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = r^2 \cdot \pi \cdot v. \quad (16)$$

Die nach v aufgelöste Gleichung (16) in (15) eingesetzt ergibt:

$$Re = \frac{\varrho}{\eta \cdot r \cdot \pi} \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t}. \quad (17)$$

Für kleine Reynoldszahlen sind die Trägheitskräfte der strömenden Flüssigkeitsteilchen klein gegen die Reibungskräfte und die Strömung ist laminar. Empirisch stellt man fest, dass in Röhren der Umschlag zur turbulenten Strömung meist bei einem kritischen Wert $R_{krit} \approx 1000$ bis 2000 geschieht. Dieser Umschlag in eine turbulente Strömung macht sich makroskopisch durch eine Vergrößerung des Strömungswiderstandes bemerkbar.

1.6 Der Strömungswiderstand

Der Strömungswiderstand einer Flüssigkeitsströmung R_{Str} beschreibt den Druckabfall Δp bei gegebenem Volumenstrom $\dot{V}$

$$R_{Str} = \frac{\Delta p}{\dot{V}} = \frac{8\eta}{R_i^2} \cdot \frac{l}{A}. \quad (18)$$

Der Strömungswiderstand für laminare Strömungen ist nach dem Gesetz von Hagen-Poiseuille Abhängig von der dynamischen Viskosität η des Mediums, dem Leitungsquerschnitt A und der Leitungslänge l . Für eine Kapillare mit runder Querschnittsfläche mit dem Innenradius R_i und der Länge l gilt:

$$R_{Str} = \frac{8\eta}{R_i^2} \cdot \frac{l}{\pi \cdot R_i^2} = \frac{8\eta \cdot l}{\pi \cdot R_i^4}. \quad (19)$$

2. Versuch

2.1 Versuchvorbereitung

Aufgabe: Zwei ungeeichte Pyknometer haben eine Leermasse von $m_1=25,6\text{ g}$ und $m_2=25,1\text{ g}$. Das erste Pyknometer ist mit destilliertem Wasser gefüllt ($\vartheta=24^\circ\text{C}$) und hat nun eine Masse von $m_1=80,5\text{ g}$. Das zweite Pyknometer ist mit einer unbekannten Flüssigkeit gefüllt und hat eine Masse von $m_2=94,5\text{ g}$. Leiten Sie die Berechnungsgleichung aus der Ausgangsbedingung $V_1 = V_2$ her und berechnen Sie die Dichte der unbekannten Flüssigkeit.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Kugelfallmethode:

Fallröhre ($R_Z=(44,0 \pm 0,1)\text{ mm}$) gefüllt mit Glycerin ($\rho_{\text{Gly}}=1,26\text{ g}\cdot\text{cm}^{-3}$), Haltemagnet mit Kern, Auslösetaster, 2 Lichtschranken mit digitalem Zeitmessgerät, Fallkugel, Messschieber.

Ausflussversuch:

Vorratsgefäß, Verteiler mit Absperrhahn und Kapillarrohren unterschiedlicher Innendurchmesser aber gleicher Länge $l=250\text{ mm}$, Messgefäße, Stativ mit unterschiedlichen eingestellten Höhenhaltungen, Stoppuhr, Waage

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung der Viskosität von Glycerin mit der Kugelfall-Methode

a) Dichtebestimmung der Fallkugel

- Bestimmen Sie folgende Parameter der Stahlkugel:
 - Durchmesser d mit dem Messschieber,
 - Masse m_K mit der OHAUS-Waage.

b) Fallmessung

Vorbereitung

- Überprüfen Sie den Versuchsaufbau.

Durchführung

- Messen Sie die Fallzeit t **5-mal**.
- Nutzen Sie die Vorgaben der Platzanleitung (siehe Praktikumsplatz).

Aufgabe 2: Messung des Volumenstromes $\dot{V}$ in Abhängigkeit von der Druckdifferenz für Kapillarrohre mit verschiedenen Durchmessern

a) Dichtebestimmung des Glycerin-Wasser-Gemisches mit Pyknometer

- Ermitteln Sie zunächst die Leermassen der beiden Pyknometer (mit Stopfen).
- Bestimmen Sie die Temperatur des destillierten Wassers.
- Befüllen Sie das Pyknometer 1 mit destilliertem Wasser (*blasenfrei*) und das Pyknometer 2 mit dem bereitstehenden Glycerin-Wasser-Gemisch. Ermitteln Sie die beiden Massen der befüllten Pyknometer.

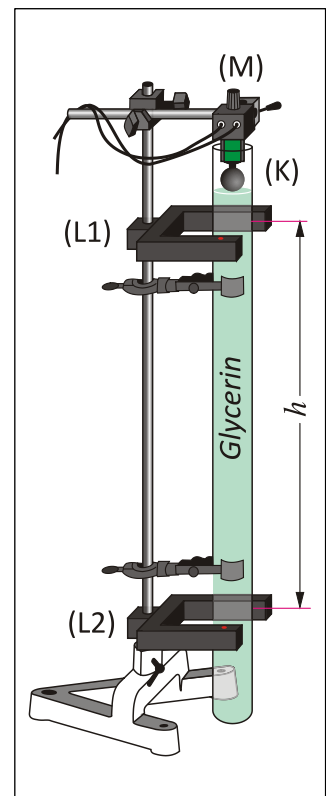


Bild 4: Versuchsaufbau **Aufgabe 1**

b) Messung durch Auslaufmethode

Vorbereitung der Messung

- Der Versuch ist nach **Bild 5** aufgebaut. Als Messflüssigkeit kommt ein **Glycerin-Wasser-Gemisch** zur Anwendung.
- Bestimmen Sie den Volumenstrom für vier Kapillaren und je vier vorgegebene Höheneinstellungen des Vorratsgefäßes (**Messstelle 1...4**) durch Wägung der in einer bestimmten Zeit ausgelaufenen Flüssigkeitsmenge.
- Ermitteln Sie zuerst die Leermasse m_{Leer} für alle **Messgefäße (1...4)**.
- Positionieren Sie zunächst das Vorratsgefäß an die **Messstelle 1** und entfernen Sie den Stopfen.
- Öffnen Sie den roten Absperrhahn unter dem Vorratsgefäß.
- Überprüfen Sie, dass **keine** Luftblasen in der Zuleitung bzw. in den Kapillaren sich befinden.
- Testen Sie den Abfluss der Messflüssigkeit, indem Sie das **Messgefäß (Test)** am Ausgang der jeweiligen Kapillaren bringen und mit Hilfe der Kugelhähne am Flüssigkeitsverteiler geringe Mengen der Messflüssigkeit vorsichtig entnehmen.
- Geben Sie danach die Messflüssigkeit **vorsichtig** und **langsam** mittels eines Trichters in das Vorratsgefäß zurück.
- Ermitteln Sie die Höhe h_0 zwischen den Kapillaren und dem Tisch.
- Stellen Sie die Messgefäße (1...4) gemäß der Bezeichnung an Ihren Platz.

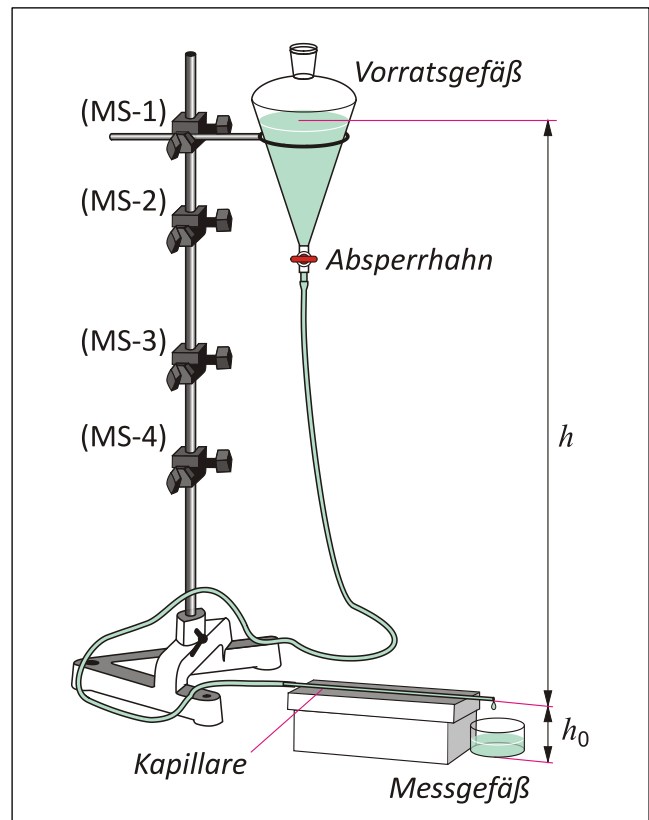


Bild 5: prinzipieller Versuchsaufbau **Aufgabe 2**

Durchführung der Messung

- **Vor** der Zeitnahme ermitteln Sie die Höhe h_{max} der Flüssigkeitssäule des Vorratsbehälters.
- Öffnen Sie den ersten Kugelhahn und lassen Sie die Messflüssigkeit gemäß der **Zeitvorgabe** (am Versuchsplatz) in das Messgefäß ab.
- **Nach** der Zeitnahme ermitteln Sie die Höhe h_{min} der Flüssigkeitssäule des Vorratsbehälters und bestimmen Sie die Masse m_1 des Messgefäßes 1.
- Wiederholen Sie den Messvorgang für die **anderen 3 Kapillaren**.
- Wiederholen Sie den Messvorgang für die **Messstellen 2...4**.

Hinweis:

Die Rückführung des Glycerins aus den Messgefäßen wird **nach Versuchsende** vom Laborpersonal durchgeführt.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung der Viskosität von Glycerin mit der Kugelfall-Methode

a) Dichtebestimmung der Fallkugel

- Berechnen Sie die Dichte der Kugel und bestimmen Sie die auftretende Abweichung (*absolut und relativ*) durch eine Fehlerrechnung.

b) Fallmessung

- Berechnen Sie die Viskosität η von Glycerin unter Verwendung des Mittelwertes der Zeitmessung nach der Gleichung (7).
- Führen Sie eine Korrektur des Ergebnisses nach der Gleichung (9) durch.
- Bestimmen Sie die Abweichungen (*absolut und relativ*) durch eine Fehlerrechnung.
- Diskutieren Sie die Ergebnisse im Vergleich mit dem Tabellenwert.
($\eta=1,480 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1}$ für $\vartheta=20 \text{ }^{\circ}\text{C}$)

Aufgabe 2: Messung der Volumenstrom $\dot{V}$ in Abhängigkeit von der Druckdifferenz für Kapillarrohre mit verschiedenen Durchmessern

a) Dichtebestimmung des Glycerin-Wasser-Gemisches mit Pyknometer

- Berechnen Sie die Dichte des Glycerin-Wasser-Gemisches und bestimmen Sie die auftretende Abweichung (*absolut und relativ*) durch eine Fehlerrechnung.

b) Messung durch Auslaufmethode

- Bestimmen Sie die korrekte Auslaufhöhe h durch folgende Gleichung

$$h = \frac{1}{2}(h_{\max} + h_{\min}) - h_0$$

und berechnen Sie die Volumina V aus den Wägungen der entsprechenden ausgeflossenen Flüssigkeitsmengen.

- Ermitteln Sie den Volumenstrom $\dot{V}$.
- Stellen Sie die Funktion $\dot{V} = f(h)$ in einem Diagramm graphisch dar (*ein Diagramm pro Kapillare*) und bestimmen Sie die Anstiege dieser Funktionen (*über die Anstiegsdreiecke*).
- Tragen Sie die Fehlerbalben ein und ermitteln Sie die max. relativen Abweichungen.
- Berechnen Sie die Strömungswiderstände R_{Str} und die Viskositäten η unter Verwendung der zuvor berechneten Anstiege.

Die zur Berechnung der Viskosität benötigte Druckdifferenz über der Kapillare ergibt sich aus

$$\Delta p = \rho_{Fl} \cdot g \cdot h \quad (20)$$

- Stellen Sie nach Gleichung (20) den Strömungswiderstand (*Mittelwert für jede Kapillare*) über den Innenradius der Kapillare in einem Diagramm (*doppelt-logarithmisch*) der Funktion $\bar{R}_{Str} = f(r_i)$ graphisch dar. Stellen Sie aus dem Anstieg des Graphen den funktionalen Zusammenhang her.
- Vergleichen Sie den ermittelten mit dem theoretisch erwarteten Potenzwert und diskutieren Sie die Abweichungen.
- Diskutieren Sie die Ergebnisse in Bezug auf laminare bzw. turbulente Strömung (*Reynolds-Zahlen!*).

3. Ergänzungen

ϑ °C	ρ g/cm ³	ϑ °C	ρ g/cm ³	ϑ °C	ρ g/cm ³	ϑ °C	ρ g/cm ³
10	0,99970	17	0,998775	24	0,997300	35	0,9940
11	0,99961	18	0,998596	25	0,997047	40	0,9922
12	0,999500	19	0,998406	26	0,996785	45	0,9902
13	0,999377	20	0,998205	27	0,996515	50	0,9880
14	0,999243	21	0,997994	28	0,996234	55	0,9857
15	0,999100	22	0,997771	29	0,995945	60	0,9832
16	0,998943	23	0,997540	30	0,995648	65	0,9806

Tabelle 1: Abhängigkeit der **Dichte ρ** des Wassers von der **Wassertemperatur ϑ**