

In vielen Fällen wird bei Betrachtungen zur Mechanik vorausgesetzt, dass Reibungseffekte vernachlässigbar sind. In diesem Versuch spielt die Reibung in Flüssigkeiten die zentrale Rolle, es soll die Viskosität einer Flüssigkeit nach zwei verschiedenen Messmethoden bestimmt werden.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Laminare Strömung

Bewegt sich eine Flüssigkeit an der Oberfläche eines festen Körpers vorbei, so hängt die Strömungsgeschwindigkeit der Flüssigkeit vom Abstand zu dieser Oberfläche ab. Unmittelbar an der Grenzfläche haftet eine dünne Flüssigkeitsschicht, die Strömungsgeschwindigkeit ist dort also null. Weiter von der Grenzfläche entfernte Flüssigkeitsschichten besitzen eine von null verschiedene Geschwindigkeit. Bei hinreichend kleinen Strömungsgeschwindigkeiten gleiten benachbarte Flüssigkeitsschichten mit leicht unterschiedlicher Geschwindigkeit aneinander vorbei, ohne ineinander zu verwirbeln. Eine solche Strömungsform heißt laminar.

Die folgenden Ausführungen setzen immer laminare Strömungsverhältnisse voraus.

1.2 Definition der dynamischen Viskosität

Bei der Bewegung eines Körpers durch eine Flüssigkeit oder ein Gas wirkt auf den Körper eine Reibungskraft, die der Bewegungsrichtung entgegengesetzt ist. Ihr Betrag hängt von der Geschwindigkeit, der Geometrie des Körpers und der inneren Reibung des Mediums ab.

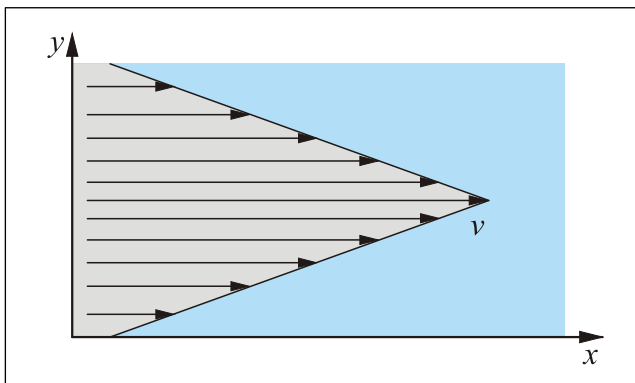


Bild 1: Geschwindigkeitsgefälle in einem viskosen Medium

Betrachtet man beispielsweise eine ebene Platte, die parallel zur Plattenebene in x -Richtung durch eine Flüssigkeit bewegt wird, so haftet die unmittelbar anliegende Flüssigkeitsschicht an ihr und bewegt sich mit der gleichen Geschwindigkeit v .

Flüssigkeitsschichten in größerem Abstand haben eine geringere Geschwindigkeit. Es entsteht ein Geschwindigkeitsgefälle in y -Richtung, also senkrecht zur Bewegungsrichtung (**Bild 1**).

Die Reibungskraft F_R , die auf die Platte wirkt, ist proportional zur Berührungsfläche A und zu dem Geschwindigkeitsgefälle dv/dy an der Plattenoberfläche.

$$|F_R| = \eta \cdot A \cdot \left| \frac{dv}{dy} \right| \quad (1)$$

Darin ist η eine Materialkonstante, die als **dynamische Viskosität** oder Zähigkeit der umgebenden Flüssigkeit bezeichnet wird. Ihre Einheit ist $[\eta] = \text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$. (Eine in der Literatur noch häufig zu findende ältere Einheit ist $1 \text{ Poise} = 1 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{cm}^{-1} = 0,1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.)

Das Verhältnis von dynamischer Viskosität zur Dichte ρ bezeichnet man als **kinemat. Viskosität** ν_{kin}

$$\nu_{kin} = \frac{\eta}{\rho} \quad (2)$$

Ihre Einheit ist $[\nu_{kin}] = \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (Frühere Einheit ist das Stokes $[\nu_{kin}] = \text{St} = 1 \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-1} = 10^{-4} \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$)

Die Viskosität einer Flüssigkeit nimmt mit wachsender Temperatur T ab. Meist gilt mit guter Näherung

$$\eta(T) = a \cdot e^{b/T} \quad (3)$$

wobei a und b empirisch zu bestimmende Konstanten sind.

1.3 Das Stokessche Gesetz

Verwendet man statt der Platte eine Kugel mit Radius r , die man mit konstanter Geschwindigkeit v durch eine viskose Flüssigkeit bewegt, so ist die Reibungskraft, die auf die Kugel wirkt (**Stokessches Gesetz**):

$$F_R = 6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v \quad (4)$$

Fällt die Kugel unter dem Einfluss ihrer Gewichtskraft durch die Flüssigkeit, so verschwindet nach hinreichend langer Zeit mit $v=\text{konst.}$ die Summe aus Gewichtskraft, Auftriebskraft und Stokesscher Reibungskraft:

$$6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot v + \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \cdot g \cdot (\rho_{Fl} - \rho_K) = 0 \quad (5)$$

ρ : Dichte der Flüssigkeit bzw. der Kugel

Mit Gleichung (5) wird die Viskosität der Flüssigkeit ermittelt:

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g}{v} \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \quad (6)$$

1.4 Das Gesetz von Hagen-Poiseuille

Bei der laminaren Strömung in einer Röhre mit dem Radius R haftet eine Flüssigkeit an der Rohrwand, während in der Rohrmitte die Fließgeschwindigkeit am höchsten ist. Gesucht wird der Volumenstrom $\Delta V/\Delta t$ durch eine Röhre der Länge l , an deren beiden Enden die Drücke p_1 bzw. p_2 herrschen. Dazu wird in der Röhre ein axialer Flüssigkeitsfaden mit dem Radius r betrachtet. Aufgrund der Druckdifferenz wirkt auf ihn die Kraft

$$F_T = (p_2 - p_1) \cdot \pi \cdot r^2. \quad (7)$$

Weiterhin wirkt nach Gleichung (1) auf die Mantelfläche des Fadens die Reibungskraft

$$F_R = 2\eta \cdot \pi \cdot r \cdot l \cdot \frac{dv}{dr}. \quad (8)$$

Bei stationärer Strömung verschwindet die Summe der beiden Kräfte und man erhält

$$2\eta \cdot l \cdot \frac{dv}{dr} = -(p_2 - p_1) \cdot r. \quad (9)$$

Man erhält $v(r)$ durch Integration über r , wobei die Randbedingung $v=0$ für $r=R$ zu berücksichtigen ist. Das Ergebnis der Integration ist:

$$v(r) = \frac{(R^2 - r^2)}{4\eta \cdot l} \cdot (p_2 - p_1) \quad (10)$$

Eine stationäre laminare Strömung in einer Röhre besitzt also ein parabelförmiges Geschwindigkeitsprofil (**Bild 2**).

Der Volumenstrom über den gesamten Querschnitt der Röhre beträgt

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \int_0^R 2\pi \cdot r \cdot v(r) \cdot dr = \frac{\pi \cdot R^4}{8\eta \cdot l} \cdot (p_2 - p_1) \quad (11)$$

Die Gleichung (11) wird als **Hagen-Poiseuillesches Gesetz** bezeichnet. Von besonderer praktischer Bedeutung für die Dimensionierung von Rohrquerschnitten ist darin die Abhängigkeit des Volumenstroms von der 4. Potenz des Radius der Röhre.

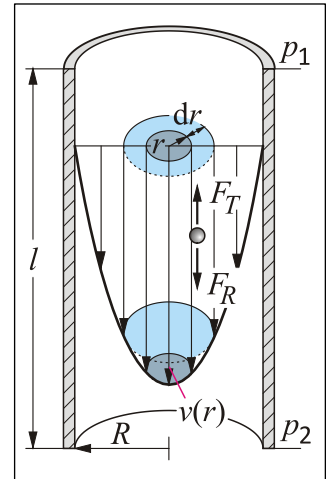


Bild 2: Laminare Rohrströmung

1.5 Fallkörperviskosimeter nach Höppler

Fällt eine Kugel in einem senkrecht stehenden Rohr, dessen Durchmesser nur wenig größer ist als der Kugeldurchmesser, so berührt die Kugel im Allgemeinen in unkontrollierbarer Weise die Rohrwand.

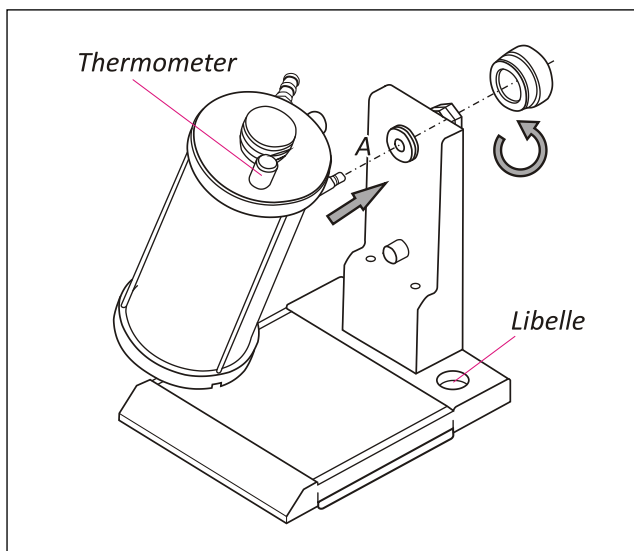


Bild 3: Höppler-Viskosimeter

Ihre Bewegung wird reproduzierbar, wenn man das Rohr um einige Grad gegen die Vertikale neigt, d. h. die Kugel an der Rohrwand gleiten lässt. Diese Überlegung veranlasste Höppler, ein Viskosimeter mit geneigtem Rohr zu entwickeln (**Bild 3**).

Die Viskosität aller Flüssigkeiten hängt sehr stark von der Temperatur ab. Aus diesem Grund befindet sich das Viskosimeterrohr in einem weiteren Glasrohr, durch das man Flüssigkeit konstanter Temperatur strömen lässt. Hat die Kugel die Messstrecke (Abstand zwischen oberer und unterer Marke am Viskosimeterrohr) durchlaufen, dreht man das Viskosimeter um 180° um die Achse A und lässt die Kugel zurück gleiten. Während der Messung ist das Viskosimeter zu arretieren.

Mit der Fallzeit t und der Fallstrecke s erhält man aus Gleichung (6)

$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g^*}{s} \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t = K \cdot (\rho_K - \rho_{Fl}) \cdot t. \quad (12)$$

g^* : wirksame Komponente der Fallbeschleunigung, $g^* = g_0 \cdot \cos \alpha$ mit α als Neigungswinkel zur Vertikalen

Die Konstante $K = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g^*}{s}$ ist nur exakt gültig, wenn:

- die Kugel in einem hinreichend großen Flüssigkeitsbehälter fällt, so dass die Wandung das Geschwindigkeitsfeld nicht beeinflusst.
- die Zeit zum Erreichen einer stationären Geschwindigkeit klein gegenüber t ist,
- die Gleitreibung vernachlässigbar ist.

Da diese Kriterien nicht erfüllt werden, wird eine **empirische Kugelkonstante K** verwendet.

Zu einem Höppler-Viskosimeter gehört ein Satz Kugeln unterschiedlicher Dichte und Größe. Die sich ergebende Kugelkonstante K ist vom Hersteller angegeben und kann nur mit Hilfe einer Kalibrierflüssigkeit ermittelt werden.

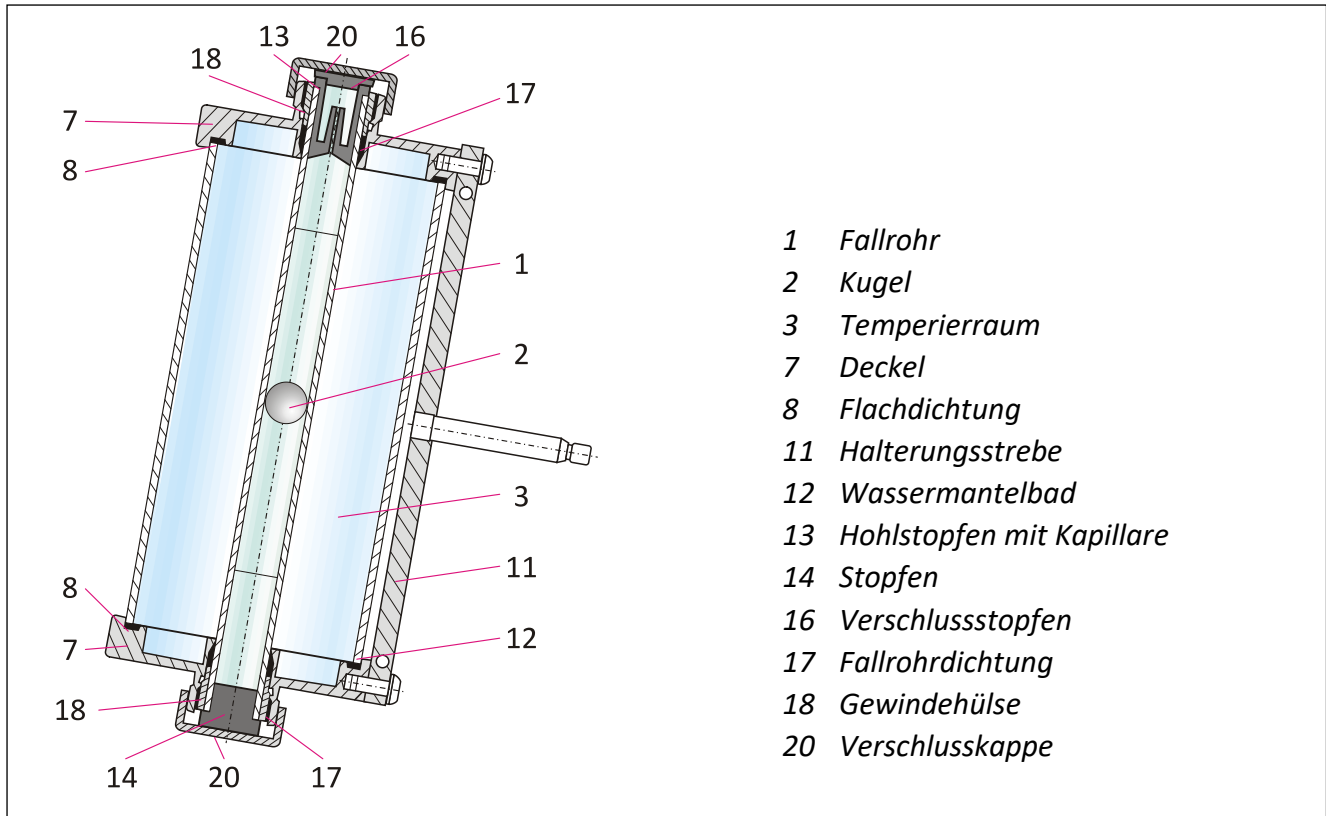


Bild 4: Aufbau eines Höppler-Viskosimeters

1.6 Kapillarviskosimeter nach Ubbelohde

Das Viskosimeter nach Ubbelohde ist ein Kapillarviskosimeter. Es unterscheidet sich von dem älteren Viskosimeter nach Ostwald durch das **Rohr 3 (Bild 5)**. Dieses Rohr sorgt dafür, dass am unteren Ende der **Kapillare 4** ein Luftdruck herrscht. Die aus der Kapillare austretende Flüssigkeit fließt in einer dünnen Schicht an der Innenwand des **Volumens C** ab. In **C** bildet sich ein sogenanntes hängendes Kugelniveau, das nach Untersuchungen von Ubbelohde unabhängig von der Dichte, der Viskosität und der Oberflächenspannung der zu untersuchenden Flüssigkeit ist. Die untere Grenze der Druckhöhe h ist daher das untere Ende der Kapillare. Die Druckhöhe h ändert sich während der Messung von $h(0)$ bis $h(t)$. Man rechnet deshalb mit dem zeitlichen Mittelwert $\bar{h}$.

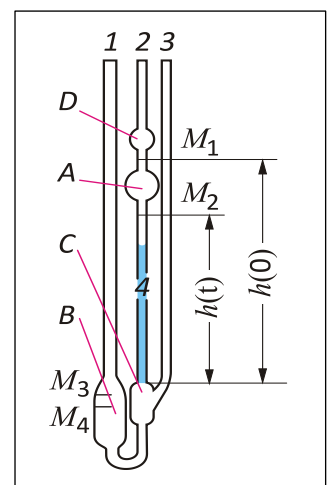


Bild 5: Ubbelohde-Viskosimeter

Für die kinematische Viskosität gilt nach Gleichung (11) und (2)

$$v_{kin} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{R^4}{V \cdot l \cdot \rho} \cdot (p_2 - p_1) \cdot t \quad (13)$$

Beim Eintritt in die Kapillare muss die Flüssigkeit beschleunigt werden. Dazu ist ein Druck δ_p notwendig.

$$p_2 - p_1 = \rho \cdot g \cdot \bar{h} \cdot \delta_p \quad (14)$$

Zur Berechnung von δ_p (*Hagenbachsche Korrektur*) schreibt man die kinetische Energie je Zeit dE^* der durch einen Hohlzylinder mit dem Radius r und der Dicke dr strömenden Flüssigkeit auf. Es gilt:

$$dE^* = \frac{1}{2} \rho \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr \cdot (v(r))^3$$

Die Integration über alle Hohlzylinder mit $v(r)$ nach Gleichung (10) liefert den Energiestrom

$$E^* = \frac{\rho \cdot V^3}{\pi^2 \cdot R^4 \cdot t^3} \quad . \quad \text{Andererseits ist } E^* = \frac{\delta_p \cdot V}{t} \quad . \quad \text{Daraus folgt:}$$

$$\delta_p = \frac{\rho \cdot V^2}{\pi^2 \cdot R^4 \cdot t^2} \quad (15)$$

Die dargestellte Überlegung ist unexakt, da beim Eintritt der Flüssigkeit in die Kapillare eine parabolische Geschwindigkeitsverteilung gemäß Gleichung (10) noch gar nicht vorliegt. Aus diesem Grund bringt man an Gleichung (15) einen Korrekturfaktor m an, der einen Wert von etwa 1,1 hat.

$$\delta_p = m \cdot \frac{\rho \cdot V^2}{\pi^2 \cdot R^4 \cdot t^2} \quad (16)$$

Setzt man die Gleichungen (14) und (16) in Gleichung (13) ein, erhält man

$$v_{kin} = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{g \cdot \bar{h} \cdot R^4}{V \cdot l} \cdot t - m \cdot \frac{V}{8\pi \cdot l} \cdot \frac{1}{t} \quad (17)$$

Mit den Viskosimeterkonstanten $K = \frac{\pi}{8} \cdot \frac{g \cdot \bar{h} \cdot R^4}{V \cdot l}$ und $K' = m \cdot \frac{V}{8\pi \cdot l}$ wird

$$v_{kin} = K \cdot (t - t'). \quad (18)$$

Die Korrekturzeit t' lautet:

$$t' = \frac{K'}{K \cdot t} \quad (19)$$

Die Ubbelohde-Viskosimeter sind so dimensioniert, dass sich die Werte der Apparaturkonstanten K abhängig vom Kapillardurchmesser nur sehr wenig von 1; 0,1 oder 0,01 cSts⁻¹ unterscheiden. Der exakte Wert von K ist in jedes Viskosimeter geätzt. Die den verschiedenen Ausflusszeiten t entsprechenden Korrekturzeiten t' sind tabelliert.

2. Versuch

2.1 Versuchsvorbereitung

Aufgabe 1: Leiten Sie die Gleichung (6) **ausführlich** aus dem Kraftansatz her.

Aufgabe 2: Warum muss das Rohr des Höppler-Viskosimeters schräg angeordnet sein?

Aufgabe 3: Das Ubbelohde-Viskosimeter (**Bild 5**) besteht aus 3 miteinander verbundenen Röhren unterschiedlicher Durchmesser. Aus welchem Grund gibt es das dritte Rohr?

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Höppler-Viskosimeter mit Thermostat-Temperierung, Ubbelohde-Viskosimeter, Wasser-Methanol-Mischung in unterschiedlichen Konzentrationsgraden, Stoppuhr, Thermometer, Messbecher

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität η einer Flüssigkeit mit dem Höppler-Viskosimeter in einem vorgegebenen Temperaturbereich

Hinweis: *Die zu untersuchende Flüssigkeit ist Wasser, welches vor dem Einfüllen in das Viskosimeterrohr durch Erwärmen entgast wurde. Sollten sich bei der Versuchsdurchführung Luftblasen im Viskosimeterrohr zeigen, wenden Sie sich bitte an das Laborpersonal.*

- Justieren Sie vor jeder Zeitmessung das Viskosimeter mit Hilfe der angebrachten Libelle.
- Die Zeitmessung erfolgt entsprechend **Abschnitt 1.5** mit einer Stoppuhr.
- Die Temperierung des Viskosimeters erfolgt über einen Thermostaten, dabei beachten Sie folgende Hinweise:
 - Stellen Sie am Thermostat eine **ca. 3 °C** niedrigere Soll-Temperatur als die gewünschte mit den Funktionstasten ($\Delta \nabla$) ein und bestätigen Sie diese mit OK.
 - Lassen Sie nun den Thermostaten auf die eingestellte Temperatur hoch heizen und vergleichen Sie die Soll-Temperatur mit der Ist-Temperatur des Viskosimeters.
 - Korrigieren Sie bei Bedarf nach oben (**um 1 ... 2 °C**) und vergleichen Sie erneut Soll- und Ist-Wert.
- Messen Sie die Fallzeit der Kugel bei der sich jetzt konstant einstellenden Temperatur im Viskosimeter.
- Führen Sie die Messungen beginnend mit der Raumtemperatur (**dann 30 °C bis 60 °C in Schrittenweiten von $\Delta T = 10$ K**) durch.
- Entnehmen Sie dem Datenblatt (*am Versuchsstand*) die zur Auswertung benötigte temperaturabhängige Dichte ρ_{Fl} sowie die Daten zur Berechnung der Kugeldichte ρ_K .
- Ermitteln Sie nach Gleichung (12) den theoretischen Wert für die Kugelkonstante K (*geg.: $d=15,815$ mm, bei 20 °C, weitere Angaben siehe Datenblatt*) und vergleichen Sie diese mit dem empirischen, gegebenen Wert.

Aufgabe 2: Bestimmung der Abhängigkeit der kinematischen Viskosität von der Konzentration eines Methanol-Wasser-Gemisches mittels Ubbelohde-Viskosimeter

- Führen Sie die Messungen für die vorgegebenen Wasser-Methanol-Gemische (*Methanolanteil von 0, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, und 100% Volumenanteil*) durch.
- Vorgehensweise beim Befüllen des Ubbelohde-Viskosimeters (**Abschnitt 1.6**):

- Das **Rohr 1 (Bild 5)** wird mit der Messflüssigkeit gefüllt, bis der Flüssigkeitsspiegel zwischen den Marken M_3 und M_4 liegt.
- Das **Rohr 3** wird mit einem Finger verschlossen und die Messflüssigkeit mit Hilfe einer Handvakuumpumpe in **Rohr 2** hoch gesaugt.
- Wenn das **Gefäß D** völlig gefüllt ist, wird die Handvakuumpumpe wieder entfernt und das **Rohr 3** geöffnet.
- Nun wird die Zeit t bestimmt, in der der Flüssigkeitsspiegel von der Marke M_1 bis zur Marke M_2 sinkt.

- Entnehmen Sie die der Ausflusszeit t entsprechende Korrekturzeit t' aus der vom Hersteller des Viskosimeters gelieferten Tabelle (*befindet sich am Versuchsplatz*).

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung der Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität einer Flüssigkeit mittels Höppler-Viskosimeter in einem vorgegebenen Temperaturbereich

- Bestimmen Sie die dynamische Viskosität $[\eta] = \text{Pa} \cdot \text{s}$ und stellen Sie diese als Funktion der absoluten Temperatur T nach $\eta = f(T)$ graphisch dar.
- Berechnen Sie die Messunsicherheit der dynamische Viskosität η durch eine Fehlerrechnung exemplarisch für einen Wert. Die Angaben einiger Messabweichungen befinden sich am Praktikumsplatz.
- Fertigen Sie zur Überprüfung von Gleichung (3) eine graphische Darstellung $\ln \eta$ als Funktion der reziproken absoluten Temperatur $\ln \eta = f(T^{-1})$ an.
- Tragen Sie in das Diagramm die Fehlerbalken ein und bestimmen Sie die maximalen relativen Messunsicherheiten.
- Bestimmen Sie den Anstieg b der Funktion (*Anstiegsdreieck*) sowie den Schnittpunkt mit der y-Achse a und tragen Sie die vollständige Funktionsgleichung mit in das Diagramm ein.

Aufgabe 2: Bestimmung der Abhängigkeit der kinematischen Viskosität ν_{kin} von der Konzentration eines Methanol-Wasser-Gemisches mittels Ubbelohde-Viskosimeter

- Berechnen Sie die kinematische Viskosität ν_{kin} nach Gleichung (18).
- Stellen Sie die Abhängigkeit $\nu_{kin} = f(\text{Vol. \%})$ graphisch dar, schätzen Sie auftretende Messabweichungen ab und tragen Sie diese als Fehlerbalken ein.
- Rechnen Sie den für Wasser ermittelten Wert der kinematischen Viskosität ν_{kin} in eine dynamische Viskosität η nach Gleichung (2) um und vergleichen Sie diesen mit dem aus **Aufgabe 1** ermittelten Wert. Diskutieren Sie möglich auftretende Abweichungen.

3. Ergänzungen

Nicht nur bei Flüssigkeiten, sondern auch bei strömenden Gasen tritt innere Reibung auf. Die anfangs durchgeführten Überlegungen für viskose Flüssigkeiten treffen auch für Gase zu. Die Viskosität von Gasen ist im Allgemeinen jedoch wesentlich geringer als bei Flüssigkeiten. Eine Besonderheit von Gasen ist, dass die innere Reibung mit der Temperatur steigt! Historisch gesehen war das eine wichtige Stütze für die Annahme der Existenz von Atomen.

- Ermitteln Sie nach der Gleichung (12) den theoretischen Wert für die Kugelkonstante K und vergleichen Sie diesen mit dem empirischen, gegebenen Wert (*Kugeldurchmesser $d=15,815\text{ mm}$ bei 20°C , Fallstrecke $s=10\text{ cm}$, Neigungswinkel $\alpha=10^\circ$*).