

Untersuchungsgegenstand des Versuches sind die elastischen Eigenschaften fester Körper. Elastizitätsmodul und Torsionsmodul werden für verschiedene Materialien bestimmt und die Gültigkeit des Hookeschen Gesetzes überprüft.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Allgemeines

Wirken auf einen festen Körper äußere Kräfte, die im Gleichgewicht sind, so tritt eine Änderung der Form und des Volumens ein. Form- und Volumenänderung gehen vollständig zurück, wenn die Kräfte aufhören zu wirken, sofern die Deformation eine bestimmte Grenze nicht überschritten hat: **Der Körper ist elastisch.**

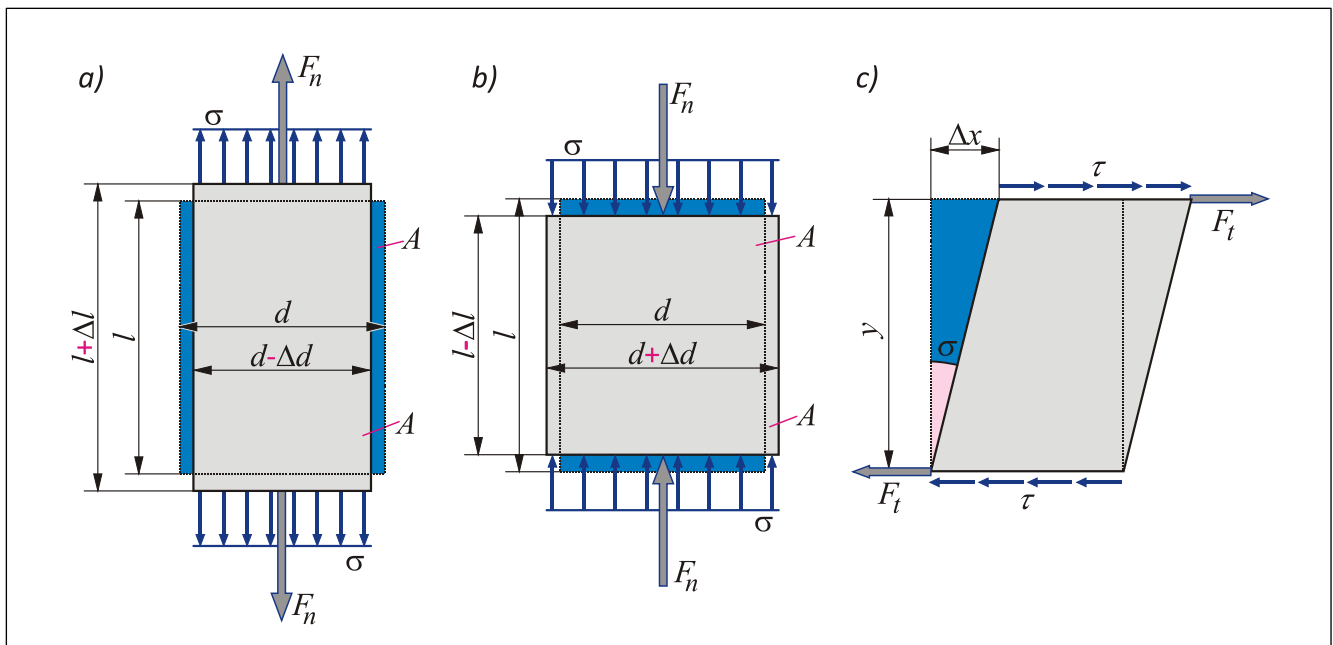


Bild 1: Elastische Formänderung

a) Normal-Zugspannung – Dehnung – Querkontraktion

b) Normal-Druckspannung – Stauchung – Querdilatation

c) Tangential-(Schub)-Spannung – Scherung

In **Bild 1** ist ein Quader der Länge l und der Fläche A dargestellt und auf ihn wirkt dabei eine Zug- (**1a**) bzw. eine Druck- (**1b**) Kraft $\vec{F}_n$. Ist diese Kraft gleichmäßig über den Querschnitt A verteilt, so sagt man, dass eine Zug- bzw. Druckspannung

$$\sigma = \frac{F_n}{A} \quad (1)$$

herrscht. Unter dem Einfluss dieser Spannung erfährt der Körper eine Verlängerung (*Verkürzung*)

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{F_n}{A} \cdot l \quad \text{oder} \quad \frac{l}{\Delta l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (2)(3)$$

Die relative Längenänderung oder „*Dehnung*“ (*positiv oder negativ!*) ist proportional zur wirkenden Spannung. Die Proportionalitätskonstante E wird als **Elastizitätsmodul** bezeichnet ($[E] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$).

Die Gleichung (2) beschreibt das **Hookesche Gesetz**. Es gilt in einem Bereich ($\varepsilon = 0 \dots \varepsilon_{max}$), der Proportionalitätsbereich genannt wird. Wirken die Kräfte nicht normal, sondern tangential (**Bild 1c**), so besteht die Deformation in einer Verschiebung der Flächen, die „Schubkraft“ $\vec{F}_t$ hat bei gleichmäßiger Verteilung über die Fläche A eine Schubspannung

$$\tau = \frac{F_t}{A} \quad (4)$$

zur Folge und diese wiederum eine Scherung

$$\Delta x = \frac{1}{G} \cdot \frac{F_t}{A} \cdot y \quad \text{oder} \quad \tan \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta x}{y} = \frac{\tau}{G} \quad \text{für} \quad \gamma \ll 1. \quad (5)(6)$$

γ ist der Scherungswinkel, die Proportionalitätskonstante G wird **Schubmodul** oder **Torsionsmodul** genannt ($[G] = \text{N} \cdot \text{m}^{-2}$). Auch gilt nur innerhalb eines Proportionalitätsbereiches ($\gamma = 0 \dots \gamma_{max}$). Oberhalb der Proportionalitätsbereiche erfolgt die Formänderung zunächst stärker als proportional, aber auch reversibel, dann nicht reversibel (*plastische Formänderung, fließen*).

Mit der Dehnung ε eines Körpers tritt gleichzeitig eine Verminderung der Dicke d um Δd auf (Δd senkrecht zu $\vec{F}_n$). Man nennt $\varepsilon_q = \Delta d/d$ Querkontraktion. Zwischen ε und ε_q besteht ein Zusammenhang der Form:

$$\mu = -\frac{\varepsilon}{\varepsilon_q}. \quad (7)$$

μ heißt **Poisson-Zahl**. Sie ist bei isotropen Stoffen nur vom Material und nicht von der Form des Körpers abhängig. Ihr Wertebereich liegt für gebräuchliche Werkstoffe zwischen 0,1 und 0,5. Durch ε und μ wird die relative Volumenänderung $\Delta V/V$ unter einseitigem Zug festgelegt:

$$\frac{\Delta V}{V} = \varepsilon \cdot (1 - 2\mu). \quad (8)$$

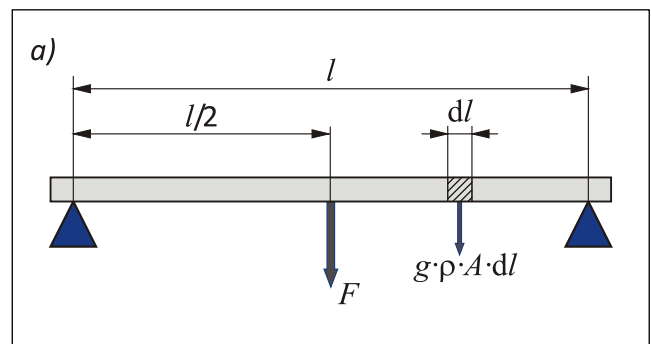
Mit Hilfe der Grundgleichungen (3) und (6) lässt sich das elastische Verhalten von Körpern mit geometrisch einfacher Gestalt berechnen.

1.2 Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus der Durchbiegung eines Balkens

Gegeben sei ein homogener Stab (Dichte ϱ , Querschnitt A), der auf zwei Schneiden (Abstand l) liegt (**Bild 2a**). Jede der beiden Schneiden ist dadurch mit der $\frac{1}{2}F_0$ belastet. Das Gewicht des Stabes F_0 ist unter der Voraussetzung, dass die Stablänge mit dem Schneidenabstand übereinstimmt,

$$F_0 = \varrho \cdot A \cdot l \cdot g \quad (9)$$

Der Stab ist infolge der Wirkung seines Gewichtes auch ohne zusätzliche Belastung etwas gebogen. Lässt man nun in der Mitte zwischen den Auflagern senkrecht zur Stabachse eine Kraft F angreifen, wird die Durchbiegung vergrößert. **Bild 2** zeigt zwei Anordnungen zur Untersuchung der Biegung. Diese sind gleichwertig, wenn beide Stäbe aus dem gleichen Material bestehen und den gleichen, konstanten Querschnitt A haben. Den folgenden Überlegungen liegt die Anordnung **b)** zugrunde.



Die angreifenden Kräfte bewirken, dass die oberen Schichten des Stabes gedrückt, die unteren gedehnt werden. Im Inneren gibt es eine Schicht, deren Länge sich nicht ändert. Diese Schicht bezeichnet man als **neutrale Faser**. Die Gleichung der neutralen Faser $y(x)$ kann leicht berechnet werden, wenn

- (1) das Hookesche Gesetz Gleichung (2) gilt,
- (2) ein ebener Querschnitt des Stabes bei allen auftretenden Belastungen unverändert bleibt, d.h. es wird keine Querkontraktion betrachtet.
- (3) die Durchbiegung so klein ist, dass für alle vorkommenden Werte von x der Betrag der Ableitung $y'(x)$ sehr klein gegen 1 ist.

Auf den Stabquerschnitt an der Stelle x (vgl. **Bild 2** und **3**) wirkt ein Drehmoment im Uhrzeigersinn aufgrund der Gewichtskraft der Stabanteile rechts von x und aufgrund der Spannungsverteilung $\sigma(\eta)$ im Querschnitt

$$M_1(x) = g \cdot \varrho \cdot A \cdot \int_0^{1/2-l-x} w \cdot dw + \int_A \eta \cdot \sigma(\eta) \cdot dA \quad (10)$$

mit $\sigma(\eta) = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{d\xi}{\xi}$.

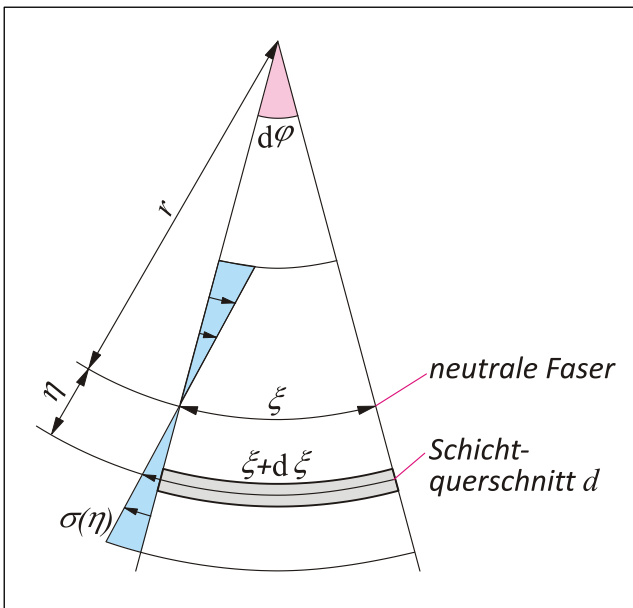


Bild 3: Deformiertes Volumenelement

Aus **Bild 3** kann man mit dem lokalen Krümmungsradius $r(x)$ der neutralen Faser

$$\frac{\xi}{r} = \frac{d\xi}{\eta}$$

entnehmen, so dass

$$\sigma(\eta) = E \cdot \frac{\eta}{r(x)} \quad (11)$$

ist. Das beim Einsetzen der Gleichung (11) in (10) entstehende Integral

$$I_\eta = \int_A \eta^2 \cdot dA \quad (12)$$

bezeichnet man als **Flächenträgheitsmoment** mit der Einheit m^4 . Wenn man das erste Integral in Gleichung (10) löst und das von Gleichung (12) verwendet, erhält man

$$M_1(x) = \frac{1}{2} g \cdot \varrho \cdot A \cdot \left(\frac{1}{2}l - x\right)^2 + \frac{1}{r} \cdot E \cdot I_\eta \quad (13)$$

Die Kraft $\frac{1}{2}(F + F_0)$ übt auf den Querschnitt an der Stelle x (**Bild 2**) ein Drehmoment im mathematisch positiven Sinne

$$M_2(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}l - x\right) \cdot (F + F_0) \quad (14)$$

aus.

Im Gleichgewichtsfalle gilt: $M_1(x) = M_2(x)$.

Aus den Gleichungen (13) und (14) folgt bei Verwendung der Gleichung (9):

$$\frac{1}{r} \cdot E \cdot I_\eta = \frac{1}{4}F \cdot (l - 2x) + \frac{1}{2}g \cdot \varrho \cdot A \cdot \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2\right). \quad (15)$$

Die Größe $1/r$ ist die Krümmung der neutralen Faser an der Stelle x . Aus der Theorie der Berührung höherer Ordnung folgt für die Krümmung einer Kurve $y(x)$

$$\frac{1}{r} = \pm \frac{y''}{(1 + (y')^2)^{3/2}}$$

Nach Voraussetzung **(3)** soll $(y')^2$ vernachlässigbar klein gegen 1 sein. In dieser Näherung gilt:

$$\frac{1}{r} = \pm y''.$$

Die Integration der Gleichung

$$\pm E \cdot I_\eta \cdot y''(x) = \frac{1}{4}F \cdot (l - 2x) + \frac{1}{2}g \cdot \varrho \cdot A \cdot \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 - x^2\right) \quad (16)$$

liefert bei Berücksichtigung der Randbedingungen $y'(0) = y(0) = 0$

$$\pm E \cdot I_\eta \cdot y'(x) = \frac{1}{4}F \cdot (lx - x^2) + \frac{1}{2}g \cdot \varrho \cdot A \cdot \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot x - \frac{1}{3}x^3\right) \quad (17)$$

$$\pm E \cdot I_\eta \cdot y(x) = \frac{1}{4}F \cdot \left(\frac{l}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{4}g \cdot \varrho \cdot A \cdot \left(\left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot x^2 - \frac{1}{6}x^4\right) \quad (18)$$

Da im vorliegenden Fall $y(x)$ im Intervall $0 < x < l/2$ positiv ist, muss in den Gleichungen (16) bis (18) das positive Vorzeichen verwendet werden. Die Funktion der neutralen Faser hat an der Stelle $x = l/2$ sowohl die größte Steigung als auch den größten Funktionswert. Aus Gleichung (18) ergibt sich, dass der durch eine mittige Punktlast F gebogene Stab eine Parabel 3. Ordnung in x beschreibt, während die Korrekturen aufgrund des Eigengewichtes eine Parabel 4. Ordnung ergeben.

Mit den Bezeichnungen $\varphi \approx \tan \varphi = y'(l/2)$ und $s = y \cdot (l/2)$ kann man die Gl. (17) und (18)

$$E \cdot I_\eta \cdot \varphi = \frac{1}{16} \left(F \cdot l^2 + \frac{2}{3} g \cdot \varrho \cdot A \cdot l^3 \right), \quad E \cdot I_\eta \cdot s = \frac{1}{48} \left(F \cdot l^3 + \frac{5}{8} g \cdot \varrho \cdot A \cdot l^4 \right),$$

oder

$$\varphi = \frac{l^2 \cdot \left(F + \frac{2}{3} F_0 \right)}{16E \cdot I_\eta}, \quad s = \frac{l^3 \cdot \left(F + \frac{5}{8} F_0 \right)}{48E \cdot I_\eta} \quad (19) \quad (20)$$

schreiben. Die Länge s nennt man **Biegepfeil**.

Im Experiment ist der Stab zunächst mit einem Gewichtsaufnehmer (*Belastungshaken*) (Masse m_s) mittig belastet (siehe **Bild 5**), der zur Aufnahme von Wägestücken dient. Man erhält den Winkel φ_0 bzw. den Biegepfeil s_0 , indem man in den Gleichungen (19) und (20) $F = m_s \cdot g$ setzt. Anschließend werden an den Gewichtsaufnehmer Wägestücke der Masse m gelegt. Der Winkel φ ergibt sich aus (19), der Biegepfeil s aus Gleichung (20) mit $F = (m_s + m) \cdot g$. Gemessen werden die Differenzen $(\varphi - \varphi_0)$ oder $(s - s_0)$. Damit können die Gleichungen (19) und (20)

$$E = \frac{l^2}{16I_\eta} \cdot \frac{m \cdot g}{(\varphi - \varphi_0)},$$

$$E = \frac{l^3}{48I_\eta} \cdot \frac{m \cdot g}{(s - s_0)}, \quad (21) \quad (22)$$

geschrieben werden. Das Gewicht des Stabes und das des Gewichtsaufnehmers brauchen daher nicht bekannt zu sein.

Um den Elastizitätsmodul E angeben zu können, muss man das Flächenträgheitsmoment I_η für den Querschnitt des zu untersuchenden Stabes berechnen. Voraussetzung für diese Berechnung ist, dass man die Lage der neutralen Faser kennt. Da sich der Stab bei der Biegung insgesamt weder verlängert noch verkürzt, ist

$$\int_A \sigma(\eta) \cdot dA = 0 \quad \text{oder mit Gl.(11)} \quad \int_A \eta \cdot dA = 0 \quad (23)$$

Aus Gleichung (23) folgt, dass der Massenmittelpunkt des Stabes in der neutralen Faser liegen muss. Hat der unbelastete Stab senkrecht zur Biegekräft eine Symmetrieebene, dann stellt die Symmetrieebene die neutrale Faser dar. Beispiele für diesen Fall sind Stäbe mit rechteckigem oder kreisförmigem Querschnitt. Eine Tabelle mit Angabe einiger Flächenträgheitsmomente befindet sich im Anhang.

1.3 Torsionsmodul

Das Torsionsmodul G lässt sich durch Untersuchungen an verdrehten Stäben mit kreisförmigem Querschnitt bestimmen. Gegeben ist ein einseitig eingespannter Stab, dessen Länge l groß gegen den Radius r sein muss. Betrachtet man im Stabinneren einen coaxialen Hohlzylinder mit dem Radius r' und der Dicke dr' (**Bild 4**) und lässt am freien Ende tangential eine Schubkraft dF_S angreifen, so wird eine ursprünglich senkrechte Faser des Zylindermantels um den Scherwinkel α gedreht. Für den Bogen $s = r' \cdot \varphi$ gilt unter der Voraussetzung $|\alpha| \ll 1$ in guter Näherung $s = l \cdot \alpha$.

Damit kann man Gleichung (6)

$$\tau = G \cdot \alpha = G \cdot \frac{r'}{l} \cdot \varphi \quad (24)$$

schreiben. Das Produkt aus Schubspannung τ und der Querschnittsfläche A des Hohlzylinders ist die Schubkraft

$$dF_S = 2\pi \cdot r' \cdot dr' \cdot G \cdot \frac{r'}{l} \cdot \varphi. \quad (25)$$

Durch Multiplikation mit dem Hebelarm r' geht die Schubkraft in das Drehmoment

$$dM = 2\pi \cdot \frac{G}{l} \cdot \varphi \cdot r'^3 \cdot dr' \quad (26)$$

über. Das resultierende Drehmoment erhält man durch Integration über alle Hohlzylinder:

$$M = \int dM = 2\pi \cdot \frac{G}{l} \cdot \varphi \int_0^r r'^3 \cdot dr',$$

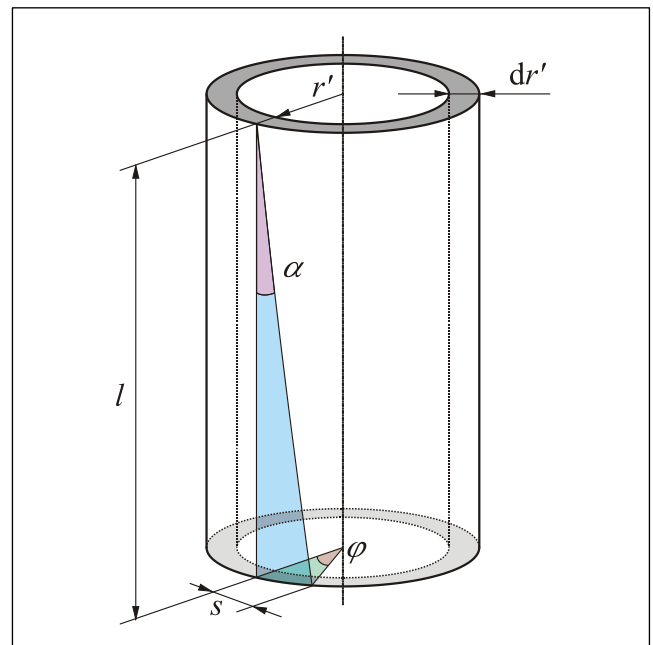


Bild 4: Torsion eines Zylinders

$$M = \frac{\pi \cdot G \cdot r^4}{2l} \cdot \varphi \quad (27)$$

Für den Torsionsmodul ergibt sich somit:

$$G = \frac{2l}{\pi \cdot r^4} \cdot \frac{M}{\varphi} \quad (28)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Wie lautet das Hookesche Gesetz? Erläutern Sie die darin auftretenden Größen!

Aufgabe 2: Stellen Sie schematisch das Spannungs-Dehnungs-Diagramm eines typischen Metallstabes dar. Zeichnen Sie die charakteristischen Punkte dieser Kennlinie mit ein und benennen Sie diese.

Aufgabe 3: An einem Stahlseil der Länge $l=3 \text{ m}$ und einem Durchmesser $d=4 \text{ mm}$ hängt ein Körper mit einer Masse $m=500 \text{ kg}$. Um wie viel Millimeter wird das Seil gedehnt?
(Elastizitätsmodul von Stahl $E=2 \cdot 10^{11} \text{ N} \cdot \text{m}^{-2}$)

Beziehen Sie für die Lösung die Gleichungen (1) – (3) in Ihre Überlegungen mit ein.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

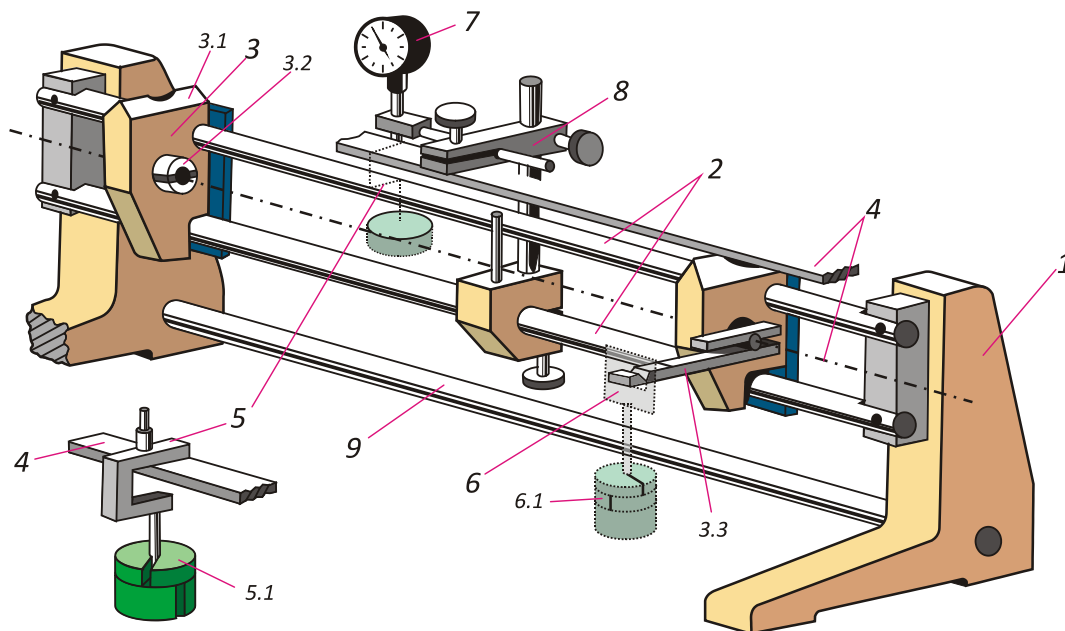


Bild 5: Skizze des Geräteaufbaues

- | | |
|--|--|
| 1 Gestell | 2 Führungsschienen |
| 3 Stütz- und Einspannböcke | 4 Probestab |
| 5 Belastungshaken mit Massestücken 5.1 | 6 Belastungshaken mit Massestücken 6.1 |
| 7 Messuhr | 8 Halterung mit Gleitbuchse |
| 9 Ablage für Probestäbe | |

2.2.2 Versuchshinweise

Die Belastungshaken bzw. die Belastungsösen (2 N) sowie die Massestücke (5 N, 2×10 N) sind in der Krafteinheit N geeicht (*siehe Bild 5*).

Aufgabe 1: Bestimmung des Elastizitätsmoduls nach Gleichung (22) für 3 verschiedene Materialien

- Bestimmen Sie mit einer Bügelmessschraube die Durchmesser aller 3 zu untersuchenden Stäbe an **mindestens 10 Stellen**.
- Messen Sie die Spannweite der Schneiden der Stütz- und Einspannblöcke ($l=600\text{ mm}$) nach und legen Sie jeweils den zu untersuchenden Rundstab auf diese Schneiden.
- Setzen Sie in die Mitte des aufliegenden Stabes den Belastungshaken (2 N).
- Positionieren Sie den Bolzen der Messuhr auf die Mitte der Hakenoberfläche und senken Sie diesen so weit ab, dass der innere kleine Zeiger auf der **Marke 10** steht. Stellen Sie mit dem Außenring danach die **Marke 0** auf den großen Zeiger ($s_0=0$).
- Machen Sie sich vor der Messung mit der Ablesung der Messuhr vertraut.
- Erzeugen Sie nacheinander mit Massestücken verschiedene Belastungen (5, 10, 15, 20, 25) N.
- Lesen Sie die entstehenden Durchbiegungen s an der Messuhr ab und notieren Sie sich die Messwerte.

Aufgabe 2: Untersuchung des Zusammenhanges zwischen (*Messung analog zur Aufgabe 1*)

a) Durchbiegung und Spannweite

- Verwenden Sie zur Untersuchung der Abhängigkeit von Durchbiegung und Spannweite einen rechteckigen Probestab mit dem Querschnitt $6 \times 25\text{ mm}$, eine Belastung **von 10 N** und die Spannweiten **von 300, 400, 500 und 600 mm**.

b) Durchbiegung und Breite

- Verwenden Sie zur Untersuchung der Abhängigkeit von Durchbiegung und Breite rechteckiger Probestäbe die Querschnitte $(4 \times 15)\text{mm}$, $(4 \times 25)\text{mm}$, $(4 \times 30)\text{mm}$, eine Belastung **von 10 N** und eine Spannweite **von 600 mm**.

Aufgabe 3: Bestimmung des Torsionsmoduls nach Gleichung (28) für 3 unterschiedliche Materialien

Hinweis:

Bitte verwenden Sie die Dreheinspannung!

- Stellen Sie die Spannweite **auf 600 mm** ein.
- Ziehen Sie den ersten der runden Probestäbe durch die Dreheinspannvorrichtung.
- Verriegeln Sie zuerst den linken Einspannblock (*Inbusschrauben gleichmäßig anziehen*).
- Richten Sie den Hebelarm so aus, dass er sich in einer waagerechten Position befindet und schrauben Sie gleichzeitig den Probestab am anderen Einspannblock fest.
- Hängen Sie den Belastungshaken auf den Hebelarm (*Markierung beachten*).
- Positionieren Sie den Fühler der Messuhr in der Kerbung des Hebels.
- Senken Sie die Messuhr so weit ab, dass der innere kleine Zeiger auf der **Marke 10** steht. Stellen Sie mit dem Außenring danach die **Marke 0** auf den großen Zeiger ($s_0=0$).

Der Abstand zwischen der Einkerbung auf dem Hebel und dem Zentrum des Probestabes beträgt 57,3 mm, d.h. eine Umdrehung der Messuhr entspricht 1°.

- Messen Sie die Hebellänge bis zum Belastungspunkt.
- Variieren Sie die Belastung (**0...24**) N für Stahl in Schrittweiten von **4 N**. Lesen Sie die Umdrehungswinkel ab.
- Wiederholen Sie die Messung für die beiden anderen Stäbe (*Belastung (0...12) N in Schrittweiten von 2 N*). Verwenden Sie für die Auswertung die ermittelten Durchmesser aus der **Aufgabe 1**.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung des Elastizitätsmoduls nach **Abschnitt 1.1** für 3 unterschiedliche Materialien

- Berechnen Sie die Mittelwerte der Durchmesser der Rundstäbe und die Messabweichungen aus systematischem und zufälligem Fehler (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).
- Stellen Sie die Belastungskurven in einem Diagramm der Funktion $F = f(s)$ graphisch dar.
- Bestimmen Sie die Anstiege unter Verwendung von Anstiegsdreiecken. Ermitteln Sie die maximal relativen Messunsicherheiten unter Verwendung von festzulegenden Fehlerbalken.
- Berechnen Sie unter Einbeziehung der zuvor ermittelten Anstiege das Elastizitätsmodul E für jeden Stab und bestimmen Sie die Messunsicherheiten durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*).
- Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse mit Tabellenwerten.

Aufgabe 2: Untersuchung des Zusammenhanges zwischen **a)** Durchbiegung s und Spannweite l sowie **b)** Durchbiegung s und Breite b

- Stellen Sie die Ergebnisse der **Aufgaben 2a** und **2b** in je einem Diagramm der Funktionen $s = f(l)$ und $s = f(b)$ (*linear und doppeltlogarithmisch*) graphisch dar.
- Bestimmen Sie die funktionellen Zusammenhänge (*Exponenten*) und interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.

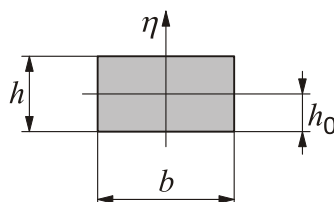
Aufgabe 3: Bestimmung des Torsionsmoduls nach **Abschnitt 1.2** für 3 unterschiedliche Materialien

- Stellen Sie die Belastungskurven in einem Diagramm der Funktion $M = f(\varphi)$ graphisch dar. Verwenden Sie **φ in Bogenmaß!**
- Bestimmen Sie die verschiedenen Torsionsmodule G nach der Gleichung (28) unter Verwendung der Anstiege (*aus Anstiegsdreiecken*) der zuvor ermittelten Funktionen $M = f(\varphi)$.
- Ermitteln Sie die Messunsicherheiten dieser Torsionsmodule mittels Fehlerrechnung und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse mit den Tabellenwerten.

3. Ergänzung

Flächenträgheitsmomente ausgewählter Querschnitte

Quader



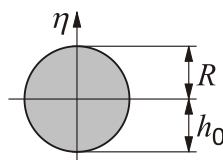
Massenmittelpunkt

$$\vec{r}_S = \frac{1}{2}h$$

Flächenträgheitsmoment

$$I_\eta = \frac{1}{12}b \cdot h^3$$

Kreis



$$\vec{r}_S = R$$

$$I_\eta = \frac{1}{4}\pi \cdot R^4$$