

Neben dem zweiten Newtonschen Axiom werden die Grundgesetze der Rotation untersucht:

- Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes von der Masse,
- Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes von der Massenverteilung bezüglich der Drehachse,
- Abhängigkeit der Winkelbeschleunigung vom Massenträgheitsmoment.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Rotation eines Massenpunktes

Ein **Massepunkt**, der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, besitzt bezüglich eines festen Punktes O den Drehimpuls

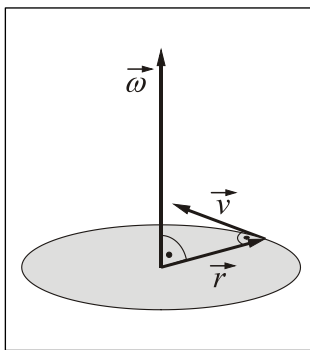


Bild 1: Zur Definition des Drehimpulses

$$\vec{L} = m \cdot (\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (1)$$

Rotiert der Massenpunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ (**Drehvektor**) auf einer Kreisbahn um O mit Radius $\vec{r}$, so ist

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}. \quad (2)$$

Da $\vec{\omega}$ senkrecht auf $\vec{r}$ steht, gilt für den Betrag des Drehimpulses

$$L = m \cdot r^2 \cdot \omega. \quad (3)$$

Die **kinetische Energie** des Massenpunktes ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} L \cdot \omega = \frac{1}{2} m \cdot r^2 \cdot \omega^2 \quad (4)$$

Es besteht eine enge Analogie zwischen der mathematischen Beschreibung von **Translations- und Rotationsbewegungen**. Dabei entspricht der Drehimpuls $\vec{L}$ dem Bahnimpuls $\vec{p}$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ der Translationsgeschwindigkeit $\vec{v}$. Der Masse bei der Translation entspricht nach Gleichung (3) und (4) bei der Rotation die Größe

$$J = m \cdot r^2, \quad (5)$$

die als **Trägheitsmoment** des Massepunktes bzgl. der gegebenen Drehachse bezeichnet wird.

1.2 Rotation starrer Körper

Zur Beschreibung eines starren Körpers um eine beliebige Achse wählen wir den Koordinatenursprung O auf der Rotationsachse. Der Drehimpuls eines Massenelementes m_i des Körpers ist nach **Bild 2**

$$\vec{L}_i = m_i \cdot (\vec{r}_i \times \vec{v}_i). \quad (6)$$

Der Gesamtdrehimpuls ist also

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i \quad (7)$$

Bild 2 zeigt, dass die Richtungen des Drehimpulses und der Winkelgeschwindigkeit nicht übereinstimmen müssen. Der Drehimpulsvektor kann ausgedrückt werden durch

$$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega} \quad (8)$$

wobei man J als linearen Operator aufzufassen hat, der dem Vektor $\vec{\omega}$ einen Vektor $\vec{L}$ zuordnet. Er wird als **Trägheitstensor** bezeichnet.

Dieser Trägheitstensor kann in Matrixform dargestellt werden. Setzt man die Gleichungen (6) und (2) in Gleichung (7) ein, so erhält man

$$\vec{L} = \sum_i m_i \cdot (\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)). \quad (9)$$

Die Ausführung dieses zweifachen Kreuzproduktes liefert unter Verwendung des Entwicklungssatzes $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \cdot \omega_x + J_{xy} \cdot \omega_y + J_{xz} \cdot \omega_z \\ L_y &= J_{yx} \cdot \omega_x + J_{yy} \cdot \omega_y + J_{yz} \cdot \omega_z \\ L_z &= J_{zx} \cdot \omega_x + J_{zy} \cdot \omega_y + J_{zz} \cdot \omega_z \end{aligned} \quad (10)$$

Die Diagonalelemente haben die Form

$$\begin{aligned} J_{xx} &= \sum_i m_i \cdot (r_i^2 - x_i^2) = \sum_i m_i \cdot (y_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i \cdot r_x^2 \\ J_{yy} &= \sum_i m_i \cdot (r_i^2 - y_i^2) = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + z_i^2) = \sum_i m_i \cdot r_y^2 \\ J_{zz} &= \sum_i m_i \cdot (r_i^2 - z_i^2) = \sum_i m_i \cdot (x_i^2 + y_i^2) = \sum_i m_i \cdot r_z^2 \end{aligned} \quad (11)$$

wobei r_x, r_y, r_z die Abstände von der x -, y - bzw. z -Achse sind, während r der Abstand vom Ursprung O ist. Die Nichtdiagonalelemente haben folgende Form:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= J_{yx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot y_i \\ J_{xz} &= J_{zx} = \sum_i m_i \cdot x_i \cdot z_i \\ J_{yz} &= J_{zy} = \sum_i m_i \cdot y_i \cdot z_i. \end{aligned} \quad (12)$$

Bei Körpern der Dichte ρ können die Summationen in Gleichung (11) und (12) durch eine Integration ersetzt werden. Für ein Diagonalelement gilt dann:

$$J_{xx} = \int_V \rho \cdot (r^2 - x^2) \cdot dV = \int_V \rho \cdot r_x^2 \cdot dV. \quad (13)$$

Jeder Körper besitzt eine Achse durch den Schwerpunkt mit maximalem und eine andere, dazu senkrechte Schwerpunktsachse mit minimalem Massenträgheitsmoment. Diese beiden und die dritte, zu beiden senkrecht stehende Achse werden als Hauptträgheitsachsen bezeichnet. Sie fallen mit den eventuell vorhandenen Symmetrieachsen des betrachteten Körpers zusammen. Die zugehörigen Massenträgheitsmomente heißen Hauptträgheitsmomente J_x, J_y und J_z .

Legt man das Koordinatensystem so, dass seine Achsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammenfallen, verschwinden alle Nichtdiagonalelemente von J , und Gleichung (10) vereinfacht sich zu

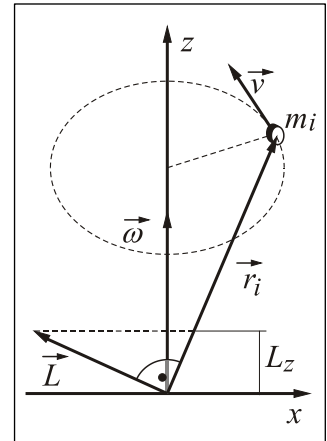


Bild 2: Drehimpuls und Winkelgeschwindigkeit eines Massenelementes

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \cdot \vec{\omega}. \quad (14)$$

Lässt man einen Körper um eine beliebige starre Achse rotieren, so sind im Allgemeinen alle drei Komponenten der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ von 0 verschieden. Da $\vec{\omega}$ durch die starre Achse raumfest gehalten wird, rotiert das körperfeste Koordinatensystem und damit $\vec{L}$ um die starre Achse. Die zeitliche Änderung des Drehimpulses $\vec{L}$ erfordert an der Rotationsachse das Drehmoment

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}, \quad (15)$$

das sich bei $\vec{\omega} = \text{konst.}$ als „Unwucht“ rotierender Körper äußert. Fällt jedoch die starre Achse mit einer Hauptträgheitsachse zusammen, so besitzt $\vec{\omega}$ nur eine von 0 verschiedene Komponente und nach Gleichung (14) zeigt $\vec{L}$ dann immer in Richtung der Achse. In diesem Fall verschwindet das Drehmoment auf die Achse (bei $\vec{\omega} = \text{konst.}$), der Körper ist „ausgewuchtet“.

1.3 Drehmoment und Winkelbeschleunigung

Um einen Körper in Rotation zu versetzen, ist eine Kraft erforderlich. Diese Kraft muss eine Komponente in tangentialer Richtung besitzen, da die Bahnbeschleunigung die gleiche Richtung aufweist. Die Wirkung der Kraft F hängt davon ab, in welchem Abstand r von der Drehachse sie angreift. Man bezeichnet die Wirkung, das Produkt aus F_t und r , als Drehmoment. Sein Betrag lautet für das i -te Massenelement:

$$M_i = F_{t,i} \cdot r_i. \quad (16)$$

Aus $F_{t,i} = m_i \cdot a_i$ mit $a_i = \alpha \cdot r_i$ ($\alpha = \text{Winkelbeschleunigung}$) folgt $F_{t,i} = m_i \cdot \alpha \cdot r_i$. Aus der Multiplikation mit r ergibt sich:

$$M_i = m_i \cdot r_i^2 \cdot \alpha.$$

Für den ganzen Körper ist:

$$M = \sum_i F_{t,i} \cdot r_i = \sum_i m_i \cdot r_i^2 \cdot \alpha. \quad (17)$$

Mit $J = \sum_i m_i \cdot r_i^2$

(siehe Gleichung (5)) als Massenträgheitsmoment bzgl. der vorgegebenen Achse erhält man die Beziehung zwischen Drehmoment M und Winkelbeschleunigung α :

$$M = J \cdot \alpha = J \cdot \ddot{\varphi}. \quad (18)$$

1.4 Versuchsaufbau

Die aufgebaute Versuchsanordnung (siehe **Bild 3**) besteht aus einer kugelgelagerten Trommel, auf der ein Drehstab mit dem Ansatzrohr aufsitzt und andererseits die Sehne befestigt ist. Am Ende der Sehne befindet sich die Vorrichtung zum Auflegen von Gewichtsstücken.

Wird der Drehstab freigegeben, so führt dieser eine gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung aus, wobei sich die Gewichtsstücke ebenfalls gleichmäßig beschleunigt abwärts bewegen.

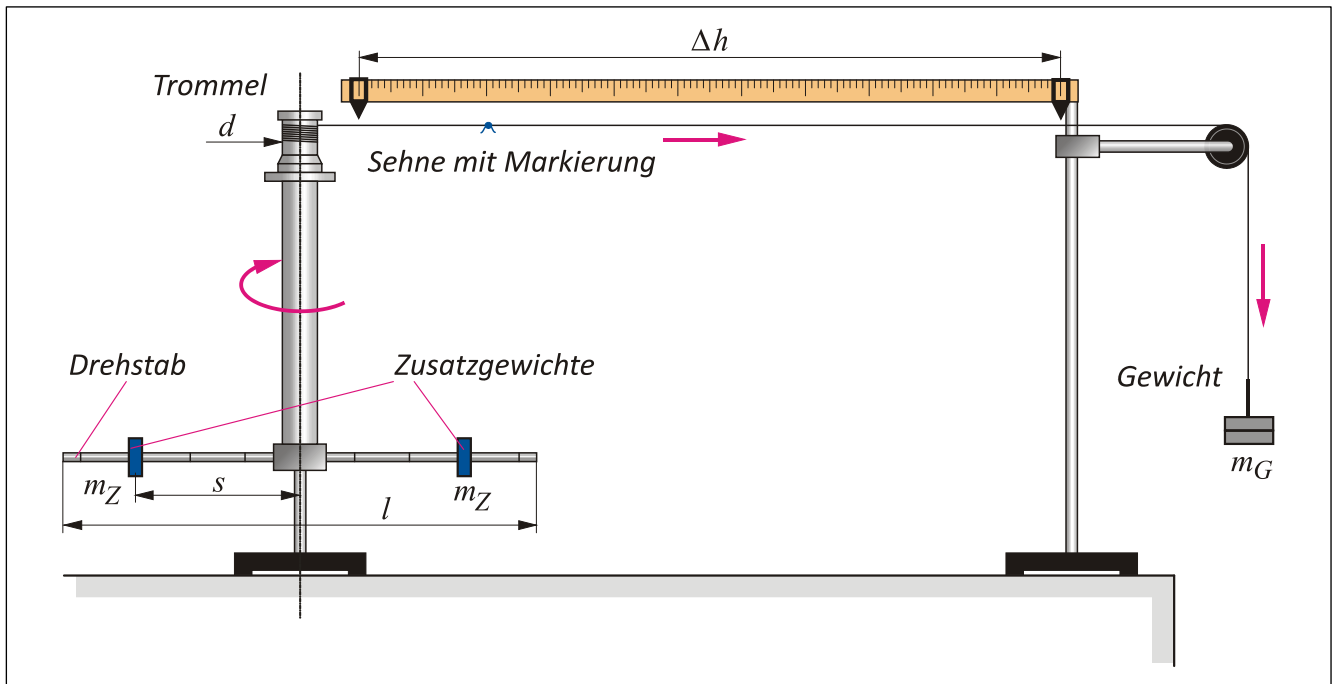


Bild 3: Versuchsaufbau

In der Zeit Δt bewegt sich das Gewichtsstück mit der Masse m_G um die Strecke Δh abwärts

$$\Delta E_{\text{pot}} = m_G \cdot g \cdot \Delta h \quad (19)$$

und gewinnt die kinetische Energie

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_G \cdot v^2. \quad (20)$$

Der Drehstab hat damit die Rotationsenergie:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \cdot \omega^2. \quad (21)$$

Die Energiebilanz lautet daher:

$$\Delta E_{\text{pot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{rot}}. \quad (22)$$

In dieser Gleichung sind m_g , g , und Δh bekannt bzw. können unmittelbar gemessen werden. v ist die Endgeschwindigkeit der gleichmäßig beschleunigten Bewegung. Die Umfangsgeschwindigkeit der Trommel ist gleich der Geschwindigkeit, mit der sich das Gewichtsstück abwärts bewegt.

Die Herleitung ergibt:

$$J = m_G \cdot r^2 \cdot \left(\frac{g \cdot t^2}{2\Delta h} - 1 \right) \quad (23)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Leiten Sie die mathematischen Zusammenhänge zwischen der Umfangsbeschleunigung der Trommel a und der Winkelbeschleunigung des Drehstabes α her.

Aufgabe 2: Die Massenträgheitsmomente des Reifens (**Aufgabe 4**) werden mit zwei verschiedenen Methoden ermittelt. Leiten Sie für die eine Methode die Gleichung (23) aus dem Energieerhaltungssatz (*Gleichung (22)*) her.

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Präzisions-Reifenapparat nach Müller, Stoppuhr, Gewichtsstücke, Waage, Mikrometerschraube, Messschieber

2.2.2 Versuchshinweise

Folgende Hinweise gelten für alle Aufgabenstellungen:

- Bestimmen Sie mit der Bügelmessschraube den Durchmesser der Trommel an **10 verschiedenen Stellen**.
- Legen Sie die Fallstrecke mittels der Sehnenmarkierung fest und verändern Sie diese nicht mehr.
- Rollen Sie die Sehne so auf die Trommel auf, dass die Windungen nicht alle übereinanderliegen.
- Messen Sie nach Freigabe des Drehstabes bzw. des Reifens die Zeit t , die die Sehnenmarkierung für den Durchlauf der Strecke Δh benötigt.

Anmerkung:

Für jede Variante sind jeweils **drei Zeitmessungen** durchzuführen.

Aufgabe 1: Varianz der beschleunigten Masse ohne Zusatzmasse

- Bestimmen Sie die Umfangsbeschleunigung a der Trommel 1 und die Winkelbeschleunigung α des Drehstabes, in dem Sie die Abhängigkeit von der beschleunigenden Masse m_G ohne Zusatzmassen aufnehmen.
- Als beschleunigende Massen sind $m_G = (50, 100, 150 \text{ und } 200)\text{g}$ zu verwenden ($u(m)/m=2\%$).

Aufgabe 2: Varianz der Zusatzmasse bei konstanter beschleunigter Masse

- Weisen Sie durch Variation der Zusatzmassen m_Z auf dem Drehstab die Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes J nach.
- Variieren Sie die Zusatzmasse m_Z auf dem Drehstab nur **paarweise** (Abstand von der Drehachse $s=(300 \pm 2)\text{mm}$).
- Die Variationen sind: **keine Zusatzmassen**, $(2 \times 125, 2 \times 250 \text{ und } 2 \times 500)\text{g}$ ($u(m)/m=2\%$).
- Verwenden Sie als beschleunigende Masse $m_G=100\text{ g}$.

Aufgabe 3: Varianz der Lage der konstanten Zusatzmasse bei konstanter beschleunigter Masse

- Weisen Sie die Abhängigkeit des Massenträgheitsmomentes J vom Abstand s der Massen vom Drehpunkt durch Verschieben der Zusatzmassen ($m_Z=2 \times 250\text{ g}$) auf dem Drehstab nach.

- Variieren Sie **6 mal** ein Paar der Zusatzmassen in seiner Lage auf dem Drehstab ($s=(50, 100, 150, 200, 250, 300)\text{mm}$).
- Verwenden Sie dazu als beschleunigende Masse $m_G=100\text{ g}$.

Aufgabe 4: Massenträgheitsmomente eines Reifens

- Ermitteln Sie für einen Reifen mit der Versuchsanordnung nach dem Energiesatz sowie aus den geometrischen Abmessungen und Wägung die Massenträgheitsmomente.
- Bestimmen Sie die Reifenmasse (*Laborwaage am Wägetisch*).
- Bauen Sie die Versuchsanordnung vom Drehstab auf Reifen durch Auswechseln der Aufhängung einschließlich der Trommel um.

Achtung:

Trommel läuft auf loser Kugel!

- Bestimmen Sie den Durchmesser der Trommel 2 (*analog zur Trommel 1*).
- Führen Sie **10 Messungen** zur Ermittlung der Zeit Δt durch.
- Verwenden Sie dazu als beschleunigende Masse $m_G=100\text{ g}$.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Varianz der beschleunigten Masse ohne Zusatzmasse

- Berechnen Sie aus den Messwerten den Mittelwert des Durchmessers d der Trommel 1 und die Messabweichung aus der Summe des systematischen und des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).
- Stellen Sie in jeweils einem Diagramm die Funktion $a = f(m_G)$ und $\alpha = f(m_G)$ graphisch dar und bestimmen Sie die Anstiege beider Regressionsgeraden mittels Anstiegsdreiecke.
- Diskutieren Sie diesen in Bezug zum zweiten Newtonschen Axiom.
- Bestimmen Sie die Messunsicherheiten der Beschleunigung a und der Winkelbeschleunigung α durch Fehlerrechnung **eines** ausgewählten Messwertes (*absolut und relativ*).

Aufgabe 2: Varianz der Zusatzmasse bei konstanter beschleunigter Masse

- Stellen Sie in einem Diagramm die Funktion $J = f(m_Z)$ graphisch dar und bestimmen Sie die Messunsicherheit des Massenträgheitsmomentes J durch Fehlerberechnung **eines** ausgewählten Messwertes (*absolut und relativ*).

Aufgabe 3: Varianz der Lage der konstanten Zusatzmasse bei konstanter beschleunigter Masse

- Stellen Sie in jeweils einem Diagramm die Funktionen $J = f(s)$ und $J = f(s^2)$ graphisch dar, interpretieren Sie die Abhängigkeiten und bestimmen Sie die Messunsicherheit des Massenträgheitsmomentes J durch Fehlerberechnung **eines** ausgewählten Messwertes (*absolut und relativ*).

Aufgabe 4: Massenträgheitsmomente eines Reifens

- Berechnen Sie aus den Messwerten den Mittelwert des Durchmessers d der Trommel 2 und die Messabweichung aus der Summe des systematischen und des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).

- Bestimmen Sie das Massenträgheitsmoment J aus dem Energiesatz entsprechend Gleichung (23) analog zum Drehstab. Die Gleichung für die Ermittlung des Massenträgheitsmomentes aus Geometrie und Masse des Reifens entnehmen Sie aus den Ergänzungen.
- Vergleichen Sie beide Massenträgheitsmomente miteinander sowie deren Messunsicherheiten durch Fehlerberechnung. Zu welchem Schluss kommen Sie?

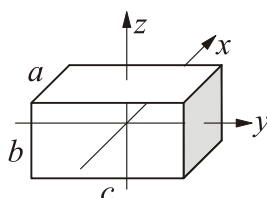
Aufgabe 5: Interpretation

- Vergleichen und interpretieren Sie die Ergebnisse der 4 Aufgaben miteinander. Wie schätzen Sie die Messergebnisse hinsichtlich unterschiedlicher Reibungseinflüsse ein (*möglichst quantitativ*)?

3. Ergänzung

Massenträgheitsmomente einiger einfacher Körper (*schwerpunktbezogen*)

Quader

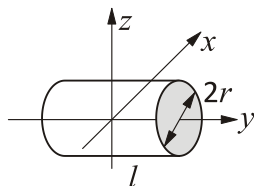


$$J_x = \frac{1}{12} m \cdot (b^2 + c^2)$$

$$J_y = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + b^2)$$

$$J_z = \frac{1}{12} m \cdot (a^2 + c^2)$$

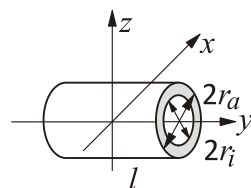
Vollzylinder



$$J_y = \frac{1}{2} m \cdot r^2$$

$$J_z = \frac{1}{12} m \cdot (3r^2 + l^2)$$

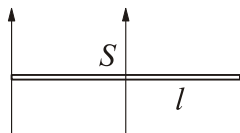
Hohlzylinder



$$J_y = \frac{1}{2} m \cdot (r_a^2 + r_i^2)$$

$$J_z = \frac{1}{4} m \cdot \left(r_a^2 + r_i^2 + \frac{1}{3} l^2 \right)$$

langer dünner Stab



$$J_S = \frac{1}{12} m \cdot l^2$$

$$J_l = \frac{1}{3} m \cdot l^2$$