

Die Zusammenhänge zwischen Geschwindigkeit, Beschleunigung, Masse und Kraft werden am Beispiel des freien Falles mit der Atwoodschen Fallmaschine experimentell untersucht. Im Rahmen der Auswertung wird eine Abschätzung und Korrektur systematischer Abweichungen vorgenommen.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Weg, Geschwindigkeit und Beschleunigung

Die Momentangeschwindigkeit eines Massenpunktes ist

$$\vec{v} = \dot{\vec{x}} = \frac{d\vec{x}}{dt}, \quad (1)$$

wobei man mit $\vec{x}(t)$ den Ortsvektor zur Zeit t bezeichnet. Die Beschleunigung $\vec{a}$ ist die zeitliche Änderung der Momentangeschwindigkeit

$$\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{x}} = \frac{d^2\vec{x}}{dt^2}. \quad (2)$$

Bei einer gleichförmigen Bewegung ist die Geschwindigkeit $\vec{v} = \text{konst.}$, bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung $\vec{a} = \text{konst.} \neq 0$.

Durch Integration ergibt sich für die Zeitabhängigkeit von Geschwindigkeit und Ort

$$\vec{v}(t) = \vec{a} \cdot t + \vec{v}_0 \quad (3)$$

$$\text{und} \quad \vec{x}(t) = \frac{1}{2}\vec{a} \cdot t^2 + \vec{v}_0 \cdot t + \vec{x}_0. \quad (4)$$

Die Integrationskonstanten $\vec{x}_0$ und $\vec{v}_0$ sind der Ort bzw. die Geschwindigkeit zur Zeit $t=0$.

Das Experiment zeigt, dass die Beschleunigung $\vec{a}$ proportional zur beschleunigenden Kraft $\vec{F}$ und umgekehrt proportional zur Masse m des beschleunigten Körpers ist und bestätigt die „Grundgleichung der Mechanik“, das **2. Newtonsche Axiom**:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}. \quad (5)$$

1.2 Freier Fall

Wird ein Körper der Masse m aus der Ruhelage in einem konstantem Schwerfeld (*Gravitationskraft* $\vec{F}_G = m \cdot \vec{g}$) beschleunigt, so führt er eine Bewegung entsprechend der Gleichung (4) aus. Legt man das Koordinatensystem so, dass die x -Achse in Richtung der Bewegung zeigt ($|\vec{a}| = g, x(t) = h(t)$) und berücksichtigt man die Anfangsbedingungen $h_0=0, v_0=0$, so ergibt sich die Gleichung (3) zu:

$$v(t) = g \cdot t \quad (6)$$

und die Gleichung (4) zu

$$h = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \quad (7)$$

1.3 Luftwiderstand, Auftrieb

Messtechnisch ist es schwierig, Ort- und Zeitmessung im luftleeren Raum durchzuführen. Wenn man im luftgefüllten Raum arbeitet, müssen Luftwiderstand und Auftrieb berücksichtigt werden. Der Luftwiderstand F_W ist proportional zur Querschnittsfläche A des fallenden Körpers, der Luftdichte ρ_L und dem Quadrat der Geschwindigkeit v . In den Proportionalitätsfaktor geht der Widerstandsbeiwert c_W ein, der durch die Form des fallenden Körpers bestimmt ist (c_W -Wert einer Kugel: 0,25 - 0,45).

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot A \quad (8)$$

Der Auftrieb F_A ergibt sich nach Archimedes aus dem Gewicht der verdrängten Luft, also

$$F_A = \rho_L \cdot g \cdot A. \quad (9)$$

Um feststellen zu können, unter welchen Voraussetzungen man diese beiden Einflüsse vernachlässigen kann, werden beide Kräfte abgeschätzt:

• **Auftrieb:** mit $\rho_L = 1,29 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ergibt sich nach Gleichung (9) für eine Stahlkugel mit dem Radius r :

$$F_A = 53 \cdot r^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$$

• **Luftwiderstand:** mit $c_W \sim 0,35$ ergibt sich für diese Stahlkugel nach Gleichungen (6), (8) und (9):

$$F_W = 13,9 \cdot h \cdot r^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$$

• **Gewichtskraft:** mit $\rho_K = 7,81 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ für die Stahlkugel ergibt sich:

$$F_G = 321 \cdot 10^3 \cdot r^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-3}$$

Im Vergleich der Kräfte erhält man:

$$\frac{F_A}{F_G} = \frac{53}{321 \cdot 10^3} \cdot \frac{r^3}{r^3} \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-3}}{\text{N} \cdot \text{m}^{-3}} = 0,165 \cdot 10^{-3} \quad (10)$$

d. h., der Einfluss des Auftriebes liegt unter 0,02% und ist daher vernachlässigbar.

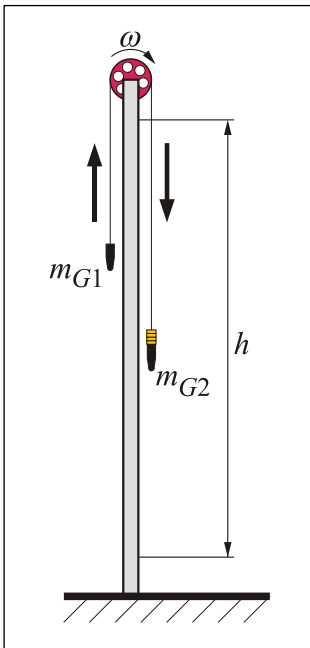
$$\frac{F_W}{F_G} = \frac{13,9 \cdot h}{321 \cdot 10^3} \cdot \frac{r^2}{r^3} \cdot \frac{\text{N} \cdot \text{m}^{-3}}{\text{N} \cdot \text{m}^{-3}} = 0,043 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{h}{r} \quad (11)$$

Die Abschätzung (11) enthält das wichtige Ergebnis, dass der relative Luftwiderstand F_W/F_G umso kleiner wird, je kleiner die Fallstrecke h bzw. je größer der Kugelradius r ist. Dieses zunächst überraschende Ergebnis, dass der relative Luftwiderstand mit dem Kugelradius abnimmt, erklärt sich aus dem Verhältnis F_W/F_G . Der absolute Luftwiderstand F_W wächst mit der Querschnittsfläche A , also mit r^2 , das Gewicht dagegen mit r^3 . Daher ist der Quotient proportional zu $1/r$. Wenn auch der Luftwiderstand vernachlässigbar klein sein soll, muss $F_W \ll F_G$ sein, zum Beispiel:

$$F_W \leq 0,01 \cdot F_G \quad \frac{F_W}{F_G} = 0,043 \cdot 10^{-3} \cdot \frac{h}{r} \leq 10^{-2} \quad \frac{h}{r} \leq 230$$

Bei einem Kugelradius von $r = 1,5 \text{ cm}$ sollte die Fallstrecke nicht mehr als $h = 345 \text{ cm}$ betragen, um den Einfluss unter 1% zu halten.

1.4 Atwoodsche Fallmaschine



Über eine leichte, spitzengelagerte Rillenscheibe wird eine Sehne geführt, an der sich zwei Massen m_{G1} und m_{G2} befinden. Für diesen Fall gilt:

$$2m_G = m_{G1} + m_{G2}.$$

Auf der einen Seite kann auf die Masse m_{G2} eine Zusatzmasse befestigt werden. Daraus folgt:

$$m_Z = m_{G2} - m_{G1}.$$

Durch das Ungleichgewicht der beiden Massen legen sie die Wegstrecke h zurück und setzen die potentielle Energie

$$\Delta E_{pot} = m_Z \cdot g \cdot h \quad (12)$$

in die kinetische Energie der Gewichtsstücke

$$E_{kin} = \frac{1}{2}(m_Z + 2m_G) \cdot v^2 \quad (13)$$

und in Rotationsenergie des rotierenden Körpers um

$$E_{rot} = \frac{1}{2}J_S \cdot \omega^2 \quad (14)$$

Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit $\omega = v/r$ (r : Abrollradius der Schnur auf der Rillenscheibe) und die äquivalente Masse $m_{red} = J_S/r^2$.

Bild 1: Prinzipskizze zur Atwoodschen Fallmaschine

Der Energiesatz ohne Berücksichtigung der auftretenden Reibung lautet

$$\Delta E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}. \quad (15)$$

In der **Aufgabe 2** wird zunächst bei der Bestimmung der Fallbeschleunigung g die Rotationsenergie nicht betrachtet ($E_{rot} = 0$). Durch Einsetzen der Gleichung (12) und (13) in die Gleichung (15) gilt:

$$g = \frac{2h}{t^2} \cdot \left(1 + \frac{2m_G}{m_Z}\right). \quad (16)$$

In der **Aufgabe 3** wird die korrigierte Fallbeschleunigung g_{korr} gesucht. Dazu muss die Rotationsenergie E_{rot} im Energieerhaltungssatz zur kinetischen Energie addiert werden. Somit gilt hier durch Einsetzen der Gleichung (12), (13) und (14) in die Gleichung (15)

$$g_{korr} = \frac{2h}{t^2} \cdot \frac{(m_Z + 2m_G + m_{red})}{m_Z}. \quad (17)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Berechnen Sie den Wert für die Fallbeschleunigung in Senftenberg.

Für die Fallbeschleunigung g in Meeresniveau ($g_0 = 9,78033 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$) bei der geografischen Breite Φ existiert eine Anpassung an die Messwerte der Form:

$$g(\Phi) = g_0 \cdot (1 + 0,0053 \cdot \sin^2 \Phi).$$

In Abhängigkeit von der Höhe h über dem Meeresspiegel erhält man

$$g(\Phi, h) = g(\Phi) \cdot \left(1 - \frac{2h}{R_E}\right).$$

Daten für Senftenberg:

geografischen Breite Φ : $51^\circ 31' 20''$
 Höhe h über Meerspiegel : 103 m
 Erdradius R_E in Äquatornähe : $6,378 \cdot 10^3 \text{ km}$

Aufgabe 2: Betrachten Sie den Einfluss der Luftreibung beim freien Fall einer Kugel für folgende Fallzeiten: $t_1 = 0,1 \text{ s}$, $t_2 = 0,6 \text{ s}$, $t_3 = 2,0 \text{ s}$ ($d = 12 \text{ mm}$, $\rho_K = 3,0 \text{ g/cm}^3$, $\rho_L = 1,29 \text{ kg/m}^3$, $c_W = 0,4$).

Folgende Berechnungen sind tabellarisch vorzunehmen:

- die Bremskraft des Luftwiderstandes für die jeweils mittlere Fallgeschwindigkeit v ,
- die zugehörige Bremsbeschleunigung a_{Br} ,
- das Verhältnis Bremsbeschleunigung zur Fallbeschleunigung,
- Fallhöhe Δh durch Annahme einer konstanten Bremsbeschleunigung,
- Fallhöhe h aus Fallbeschleunigung,
- Vergleich der Verhältnisse aus Fallhöhe $\Delta h/h$ und Beschleunigung a_{Br}/g .
- Welche Schlussfolgerungen bezüglich der Messgenauigkeit beim Fallversuch ziehen Sie daraus?

$v = g \cdot t$	a_{Br}/g	$\Delta h = \frac{1}{2} a_{Br} \cdot t^2$	$h = \frac{1}{2} g \cdot t^2$	$\Delta h/h = a_{Br}/g$
-----------------	------------	---	-------------------------------	-------------------------

Lösungsansatz:

$$F_W = m \cdot a_{Br}$$

$$F_W = \frac{1}{2} c_W \cdot \rho_L \cdot v^2 \cdot A_K$$

$$m = \rho_K \cdot V_K$$

A_K : wirkende Kugel­fläche
 V_K : Volumen der Kugel

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Gerätesatz zur Untersuchung freier und verzögerter Fall, elektronischer Kurzzeitmesser, Feinwaage, Messschieber

2.2.2 Versuchshinweise

Aufgabe 1: Bestimmung der Fallbeschleunigung durch Versuchsanordnung (siehe **Bild 2**) freier Fall durch Variation der Fallhöhe h

- Stellen Sie die Fallhöhe mittels der Markierung an Auslösevorrichtung und Aufprallplatte ein.
- Verändern Sie die Fallhöhe pro Messung von **(1,60-0,50) m in Schritten von 10 cm** durch Verstellen der Aufprallplatte und messen Sie die jeweilige Fallzeit t .
- Lösen Sie die Kugel bzw. den Uhrenstart durch Betätigung des Fernauslösers aus. Der Uhrenstopp erfolgt durch Aufschlagen der Kugel auf die Aufprallplatte.
- Bringen Sie vor jeder Messung die Aufprallplatte und den Auslösehebel in die Ausgangsstellung und setzen Sie die elektronische Stoppuhr auf Null zurück.

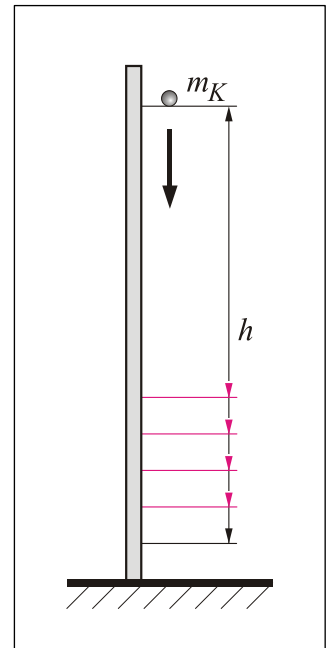


Bild 2: Prinzipskizze

Aufgabe 2: Bestimmung der Fallzeit mit unterschiedlichen Zusatzmassen m_Z bei konstanter Fallhöhe h (Siehe **Bild 1**).

- Bestimmen Sie die Zusatzmassen m_Z (*Laborwaage am Wägeplatz*).
- Bringen Sie die Auslösevorrichtung **beim Nullpunkt** und die Aufprallplatte **bei 1,60 m** an. Legen Sie die Verbindungssehe mit den daran befestigten Massen m_G über die Rillenscheibe und stellen Sie eine der Massen vorsichtig auf die Auslösevorrichtung.
- Legen Sie nun auf die aufgestellt Masse m_G die erste Zusatzmasse m_Z .
- Auslösung und Zeitmessung erfolgt wie in der **Aufgabe 1**.
- Erhöhen Sie pro Messung die Anzahl der Zusatzmassen m_Z um eine Zusatzmasse (*insgesamt für 5 Zusatzmassen*).

Aufgabe 3: Bestimmung des Massenträgheitsmoments der Rillenscheibe mit der dynamischen Messmethode zur Korrektur der Ergebnisse von **Aufgabe 2**

- Zur Bestimmung des Massenträgheitsmomentes J_S der Rillenscheibe macht man diese zu einem Pendel, indem man mit Hilfe eines um die Rille gelegten Gummibandes am Umfang der Scheibe eine kleine Masse m' befestigt (siehe **Bild 3**).
- Dazu nehmen Sie die Rillenscheibe mit der Befestigung vom Träger ab. Die Scheibe hat jetzt ein stabiles Gleichgewicht und kann als Pendel um ihre Schwerpunktschwerachse schwingen.
- Zur Bestimmung des Massenträgheitsmomentes J_S , sind vor der Montage zunächst d , d' und m' zu messen.

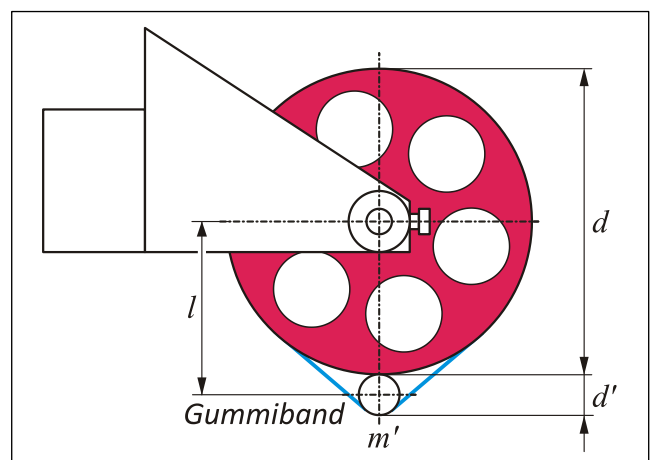


Bild 3: Pendelaufbau

- Danach lenken Sie das Pendel ein wenig aus und messen die Zeit t für mindestens **10 Schwingungen** mit der Stoppuhr. Nehmen Sie eine Messreihe von **5 Zeitmessungen** auf.

Aus der Schwingungsgleichung ergibt sich

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{J}{m' \cdot l \cdot g}} \quad (17)$$

J ist die Summe des Massenträgheitsmomentes des Messsystems „Rillenscheibe“ und des von der Masse m' zusätzlich verursachten Massenträgheitsmomentes:

$$J = J_S + m' \cdot l^2, \quad (18)$$

Daraus es ergibt sich:

$$J_S = m' \cdot l \cdot \left(\frac{g \cdot T^2}{4\pi^2} - l \right) \quad (19)$$

Aufgabe 4: Atwoodsche Fallmaschine mit Auffangvorrichtung für die Zusatzmassen (siehe **Bild 4**).

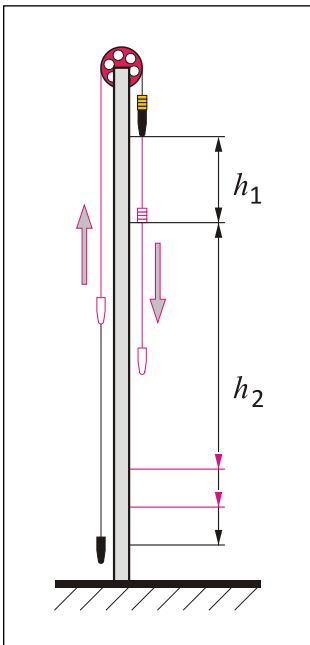


Bild 4: Prinzipskizze

- Positionieren Sie die Auffangvorrichtung für die Zusatzmassen **bei 0,50 m**. Dazu müssen Sie die Rillenscheibe und die Auslösevorrichtung vom Träger entfernen, die Auffangvorrichtung für die Zusatzmassen auf den Träger schieben und die Rillenscheibe und die Auslösevorrichtung zur Messung wieder an die vorherige Stelle montieren.
- Stecken Sie die Anschlusskabel von der Auslösevorrichtung zur Auffangvorrichtung der Zusatzmassen um (*Anschluss der Masseleitung beachten!*).
- Legen Sie die Verbindungssehne mit den daran befestigten Massen m_G über die Rillenscheibe und stellen Sie eine der Massen vorsichtig auf die Auslösevorrichtung.
- Legen Sie nun auf die aufgestellte Masse m_G die Ringplatte mit der ersten Zusatzmasse m_Z .
- Führen Sie je eine Messreihe für die Zusatzmassen (**20 und 30**)g durch (*Masseangabe jeweils mit Ringplatte*).
- Variieren Sie die Fallhöhe h_2 von (**0,1 ... 1,1**)m in **Schrittweiten** von **10 cm** (*Aufprallplatte pro Messung nach oben schieben*).
- Der Messvorgang selbst erfolgt wie in **Aufgabe 1**.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Bestimmung der Fallbeschleunigung mit der Versuchsanordnung freier Fall durch Variation der Fallhöhe h

- Stellen Sie die Funktion $h = f(t^2)$ in einem Diagramm graphisch dar.
- Bestimmen Sie die Fallbeschleunigung g über den Anstieg der graphischen Darstellung unter Verwendung der linearen Regressionsgeraden (*Anstiegsdreieck*).
- Ermitteln Sie durch selbst festzulegende Fehlerbalken die relativen Messunsicherheiten der Messgrößen der Höhe h und dem Quadrat der Zeit.
- Bestimmen Sie durch eine Fehlerrechnung die Messunsicherheit der ermittelten Fallbeschleunigung g (*absolut und relativ*).
- Schätzen Sie den maximalen Einfluss des Luftwiderstandes auf die gemessenen Zeiten entsprechend dem **Abschnitt 1.3** für die im Versuch verwendete Kugel ab.

Aufgabe 2: Bestimmung der Fallzeit mit unterschiedlichen Zusatzmassen m_Z bei konstanter Fallhöhe h (Siehe **Bild 1**).

- Berechnen Sie anhand der Messwerte nach Gleichung (16) die Fallbeschleunigung g und bestimmen Sie für eine ausgewählte Fallzeit die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung.
- Erfassen Sie die hier auftretenden Abweichungen vom vorher errechneten Fallbeschleunigungswert für Senftenberg (siehe *Vorbetrachtung*) in ihrer Abhängigkeit von der Größe der Zusatzmasse m_Z und diskutieren Sie das Ergebnis.

Aufgabe 3: Bestimmung des Trägheitsmoments der Rillenscheibe mit der dynamischen Messmethode zur Korrektur der Ergebnisse von **Aufgabe 2**

- Bestimmen Sie die Schwingungsdauer T für eine Schwingung aus dem Mittelwert.
- Korrigieren Sie die Fallbeschleunigungswerte der **Aufgabe 2** mit dem ermittelten Trägheitsmoment nach Gleichung (19) durch Einbeziehung der äquivalenten Masse m_{red} nach Gleichung (17) (Abrollradius der Rillenscheibe $r=30\text{ mm}$).

Zusatz: Bestimmen Sie für eine ausgewählte Fallzeit die Messunsicherheiten durch eine Fehlerrechnung (Schwingungsdauer T , Schwerpunktradius l , Massenträgheitsmomente J_S , äquivalente Masse m_{red} , und korrigierte Fallbeschleunigung g_{korrr}).

- Diskutieren Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 4: Atwoodsche Fallmaschine mit Auffangvorrichtung für die Zusatzmassen

- Führen Sie einen Nachweis der gleichförmigen Bewegung durch eine graphische Darstellung von $h = f(t)$.
- Bestimmen Sie die Anstiege mittels Anstiegsdreiecke und vergleichen Sie diese mit den Mittelwerten der jeweiligen Einzelgeschwindigkeiten v .
- Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.