

Unter Verwendung der Gravitationsdrehwaage als hochempfindliches Kraftmessgerät wird die Gravitationskonstante γ experimentell ermittelt. Eine auftretende systematische Abweichung ist quantitativ zu erfassen und das Ergebnis entsprechend zu korrigieren.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Das Gravitationsgesetz

Zwischen zwei Kugeln der Massen m und M wirkt eine anziehende Kraft F , deren Betrag proportional zu m und M und umgekehrt proportional zum Quadrat des Abstandes r zwischen den beiden Massenschwerpunkten ist. Das Gravitationsgesetz besitzt also die Form

$$F(r) = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \quad (1)$$

mit der Gravitationskonstanten γ als Proportionalitätskonstante.

Zur Bestimmung von γ ist es notwendig, die Kraft zwischen zwei Körpern bekannter Masse und mit bekanntem Abstand zu messen.

1.2 Die Gravitationsdrehwaage

Zum Nachweis der Gravitationskraft zwischen zwei im Labor verfügbaren Massen, ist ein äußerst empfindliches Kraftmessgerät erforderlich. Man benutzt dazu eine Drehwaage, deren Aufbau in **Bild 1** dargestellt ist. Eine Drehwaage dieser Art wurde erstmals von Henry Cavendish 1798 verwendet. Mit ihr können noch Kräfte in der Größenordnung 10^{-9}N gemessen werden.

An dem Torsionsfaden mit sehr kleiner Winkelrichtgröße D ist ein Spiegel befestigt. Damit kann über einen Lichtzeiger die Verdrillung des Fadens gemessen werden.

Die beiden Körper mit großer Masse M ruhen auf einem Drehteller, dessen Lage so verändert werden kann, dass die eine große Kugel einmal der einen kleinen Kugel und dann der anderen kleinen Kugel gegenüber liegt. Zur Bestimmung der Gravitationskraft zwischen m und M muss die Winkelrichtgröße D des Torsionsfadens und der Winkel zwischen den beiden Gleichgewichtslagen des Messsystems ermittelt werden.

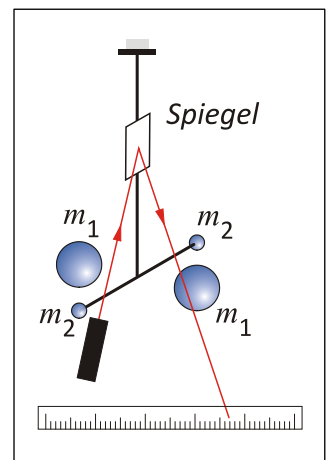


Bild 1: Gravitationsdrehwaage

1.3 Experimentelle Bestimmung der Gravitationskonstanten

Das System sei zunächst in der Gleichgewichtslage **A** (**Bild 2**). Durch Umlegen der großen Kugeln wird das Kräftegleichgewicht zwischen Gravitationskraft und Rückstellkraft des Torsionsfadens aufgehoben und der Torsionsfaden mit den daran befestigten kleinen Massen m beginnt eine durch Reibung schwach gedämpfte Schwingung, die nach einigen Perioden in der neuen Gleichgewichtslage **B** endet. Diese unterscheidet sich von **A** um den Winkel α .

Bei Auslenkung des Messsystems um einen beliebigen Winkel φ wirkt das rückstellende Drehmoment

$$N = -D \cdot \varphi \quad (2)$$

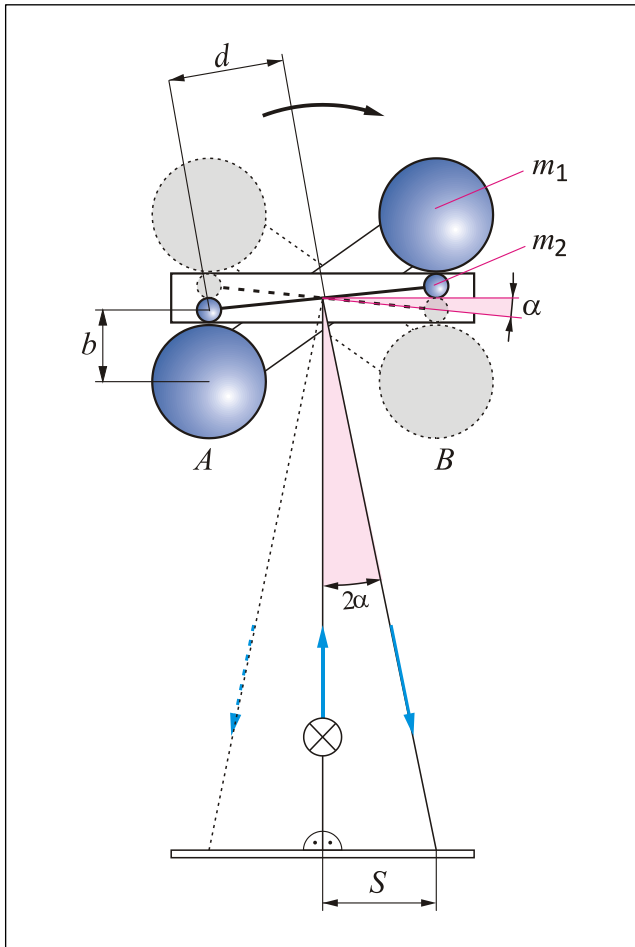


Bild 2: Geometrische Beziehungen an der Gravitationsdrehwaage

Unter Vernachlässigung des Einflusses der Dämpfung erhält man als Differentialgleichung der Schwingung

$$J \cdot \ddot{\varphi} + D \cdot \varphi = 0 \quad (3)$$

wobei J das Trägheitsmoment des Messsystems bezüglich der durch den Aufhängungsfaden gegebenen Achse ist. Es folgt für die Schwingungsdauer

$$T^2 = 4\pi^2 \cdot \frac{J}{D} \quad (4)$$

und damit

$$D = 4\pi^2 \cdot \frac{J}{T^2} \quad (5)$$

Das Trägheitsmoment J der beiden Kugeln lässt sich ausdrücken durch

$$J = 2m \cdot d^2 \quad (6)$$

und man erhält

$$D = 8\pi^2 \cdot \frac{m \cdot d^2}{T^2} \quad (7)$$

Zwischen dem Drehwinkel α , der Lichtzeigerposition S und dem Abstand L zwischen Skala und Torsionspendel besteht der Zusammenhang

$$\frac{S}{2L} = \tan \alpha \approx \alpha \quad (\text{wenn Winkel } \alpha \text{ sehr klein}) \quad (8)$$

Wegen der Winkelverdopplung bei der Reflexion des Laserstrahls am Spiegel gilt

$$\frac{S}{L} \approx \alpha \quad (9)$$

Die Anziehungskraft F zwischen den beiden Kugelpaaren erzeugt in der Gleichgewichtslage A ein Drehmoment

$$N_1 = 2F \cdot d = 2\gamma \cdot \frac{m \cdot M \cdot d}{b^2}, \quad (10)$$

dass vor dem Umlegen der schweren Kugeln durch das Rückstellmoment des Torsionsfadens kompensiert wird. Ist nach dem Umlegen die neue Gleichgewichtslage B erreicht, erzeugt die Gravitationskraft ein Drehmoment N_2 , das entgegengesetzt zu N_1 gerichtet ist. N_1 und N_2 haben den gleichen Betrag, wenn die beiden betrachteten Gleichgewichtslagen symmetrisch zur Ruhelage des Messsystems liegen:

$$N_2 = -N_1 \quad (11)$$

Die Differenz der beiden Drehmomente erzeugt die Änderung der Gleichgewichtslage um den Winkel $\frac{1}{2}\alpha$:

$$\Delta N = N_1 - N_2 = 2N_1 = D \cdot \frac{1}{2}\alpha \quad (12)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (7), (9) und (10) in (12) erhält man die Gravitationskonstante

$$\gamma = \pi^2 \cdot \frac{d \cdot b^2}{M \cdot T^2} \cdot \frac{S}{L} \quad (13)$$

1.4 Systematische Abweichung

Jede der beiden kleinen Kugeln erfährt auch eine Anziehungskraft $\vec{F}_1$ von der entfernteren großen Kugel. Diese hat eine Komponente $\vec{F}_1'$ in entgegengesetzte Richtung der zu messenden Kraft $\vec{F}$.

Nach **Bild 3** gilt

$$F_1 = \gamma \cdot \frac{m \cdot M}{b^2 + 4d^2} \quad (14)$$

und
$$\frac{F_1'}{F_1} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + 4d^2}} \quad (15)$$

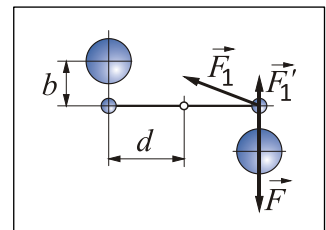


Bild 3: Anziehungskraft der entfernteren Kugel

Die durch F_1 erzeugte relative Abweichung ist mit Gleichung (1)

$$\frac{F_1'}{F} = \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + 4d^2}} \right)^3 \quad (16)$$

Die im beschriebenen Experiment gemessene Kraft F_K , die die Kugel beschleunigt, ist also

$$F_K = F - F_1' = F \cdot (1 - \beta) \quad (17)$$

mit

$$\beta = \left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + 4d^2}} \right)^3 \quad (18)$$

Die Gravitationskraft F und damit auch die Gravitationskonstante γ wird mit Gleichung (13) folglich um den Faktor $(1 - \beta)$ zu klein bestimmt. Der korrigierte Wert von γ ist deshalb

$$\gamma_{Korr} = \frac{\gamma}{1 - \beta} \quad (19)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe 1: Leiten Sie aus den Gleichungen (7), (9), und (10) durch einsetzen in Gleichung (12) die Bestimmungsgleichung zur Berechnung der Gravitationskonstanten γ her.

Aufgabe 2: Berechnen Sie die in der Gleichgewichtslage *A* (**Bild2**) auftretende Anziehungskraft zwischen den beiden Kugelpaaren und das auftretende Drehmoment N_1 . Verwenden Sie dazu die technischen Daten der Gravitationsdrehwaage und den Tabellenwert der Gravitationskonstanten. ($\gamma = 6,67259 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$)

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Gravitationsdrehwaage, He-Ne-Laser als Lichtstrahlerzeuger, Maßstab, Bandmaß, Stoppuhr

Technischen Daten der Gravitationsdrehwaage:

$M=1,5 \text{ kg}$

$m=15 \text{ g}$

$d=5 \text{ cm}$

$b=46,5 \text{ mm}$

2.2.2 Versuchshinweise

Für das Experiment ist die Gravitationsdrehwaage an einer erschütterungsfreien Wand montiert und justiert.

- Beobachten und dokumentieren Sie **mindestens 10 Minuten** lang in Schrittwerten von **1 Minute** vor Beginn der Messungen die Nullpunktstabilität.

Aufgabe: Ermittlung der Gravitationskonstanten aus der Positionsaufnahme des Lichtzeigers $x(t)$

- Nehmen Sie die Position $x(t)$ des Lichtzeigers für mehr als **drei Schwingungsperioden** auf (siehe **Bild 4**).

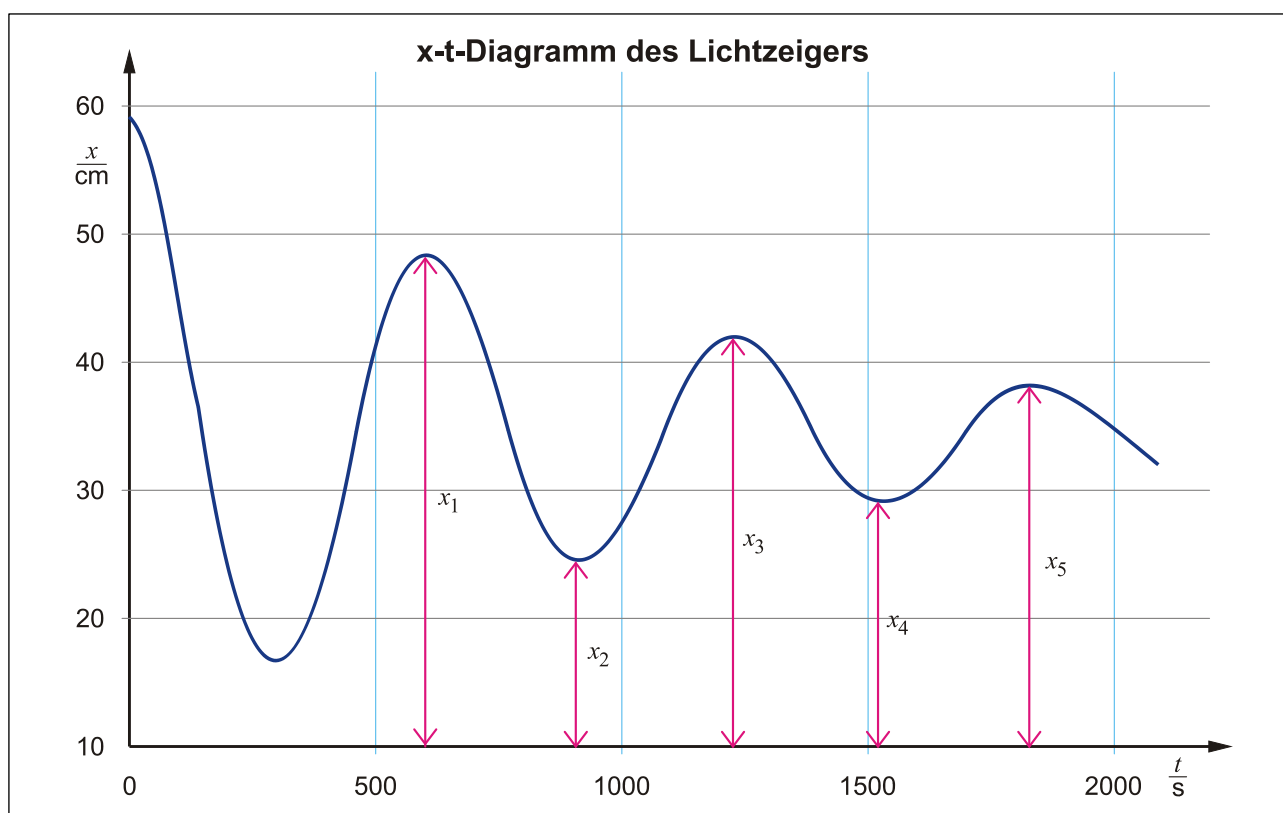


Bild 4: Beispiel eines $x - t$ -Diagramms des Lichtzeigers (Zur Darstellung DIN A3 empfohlen).

- Führen Sie die Messung immer mit mindestens zwei Personen durch, von denen die eine ausschließlich den Lichtzeiger auf der Skala verfolgt und die andere die Bleikugeln umlegt, die Messzeiten ausruft und die Messung protokolliert.
- Zum Zeitpunkt $t=0$ Bleikugeln rasch, aber vorsichtig von der einen in die andere Extremstellung bringen.
- Verständigen Sie den Betreuer **vor** dem Umlegen der Bleikugeln!

Achtung:

Berühren Sie weder mit den Fingern noch mit den Bleikugeln das Gehäuse!

- Starten Sie gleichzeitig mit dem Umlegen der Bleikugeln die Stoppuhr.
- Lesen Sie **alle 10 s** die Zeigerstellung ab und notieren Sie diese.
- Vergrößern Sie nach einer vollständigen Schwingungsperiode die Messintervalle **auf 15 s**.
- Vergrößern Sie nach einer weiteren Schwingungsperiode die Messintervalle **auf 30 s**.
- Bestimmen Sie nach der Messung den Abstand L zwischen Lichtzeigerspiegel und Skala.

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Ermittlung der Gravitationskonstanten aus der Positionsaufnahme des Lichtzeigers $x(t)$
(Zur Bearbeitung der Aufgabe nutzen Sie **Bild 4!**)

Bestimmung von x_A

- Stellen Sie zur Festlegung des Anfangswertes x_A die Funktion $x_A = f(t)$ graphisch dar.
- Berechnen Sie aus den Messwerten von x_A den Mittelwert und die Messabweichung aus der Summe des systematischen und des zufälligen Fehlers (*Mittelwert, Standardabweichung, t-Verteilung*).
- Tragen Sie den arithmetischen Mittelwert mit in das Diagramm ein.

Bestimmung von x_B

- Stellen Sie die Messwerte in einem Diagramm der Funktion $x = f(t)$ auf A3-Millimeterpapier graphisch dar.
- Bestimmen Sie aus der graphischen Darstellung die Schwingungsdauer T (**alle gemessenen Perioden ausnutzen!**) und den Endausschlagwert x_B .
- Messen Sie zur genaueren Bestimmung des Endausschlagwertes x_B den Ausschlag von **fünf** aufeinander folgenden Umkehrpunkten.
- Bilden Sie die Mittelwerte der Maxima und der Minima und wiederum hiervon den Mittelwert. So ergibt sich:

$$x_B = \frac{1}{2} \left(\frac{x_1 + x_3 + x_5}{3} + \frac{x_2 + x_4}{2} \right)$$

Für die Ermittlung der Auslenkung S gilt:

$$S = x_A - x_B$$

- Bestimmen Sie die Messunsicherheiten für $S(x_A, x_B)$ und T unter Verwendung des x - t -Diagrammes.
- Berechnen Sie die Gravitationskonstante γ unter Verwendung der Gleichung (13) und geben Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an.

- Ermitteln Sie den Korrekturwert nach Gleichung (19) und berechnen Sie die Gravitationskonstante mit dem Korrekturwert erneut aus.
- Vergleichen Sie diesen Wert mit dem Tabellenwert und diskutieren Sie das Ergebnis.
- Die Abstandsangabe b ist mit der Annahme verbunden, dass sich die kleinen Bleikugeln in der Gehäusemitte befinden und die großen Bleikugeln die Außenwand berühren. Um wie viel Prozent wird das Ergebnis für die Gravitationskonstante verfälscht, wenn ein zusätzlicher Abstand von $b=1\text{ mm}$ angenommen wird?

Aufgabe 2: Bestimmung der Gravitationskonstanten aus der Beschleunigung, die die kleinen Kugeln in den ersten 60s nach dem Umlegen des Systems erfahren

- Entnehmen Sie dazu die benötigten Messwerte aus der **Aufgabe 1**.
- Leiten Sie die funktionellen Zusammenhänge eigenständig her.

Hinweise zur Herleitung

Durch Gleichsetzen der Kraft mit der Gravitationskraft ergibt:

$$F(a) = F(r)$$

$$m \cdot a = 2\gamma \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} ,$$

wobei $r \approx b$ dem Kugelabstand in Stellung A entspricht. Warum ist das zulässig?

- gleichförmige Beschleunigung: $a = \frac{2s}{t^2}$
- Verwendung geometrischer Beziehungen (*Vergrößerung!*) aus **Bild 2**.
- Als weitere Hilfe erstellen Sie den funktionellen Zusammenhang $S_{60} = f(t^2)$ graphisch dar (*Auslenkung S in den ersten 60 s in Abhängigkeit vom Quadrat der Zeit*).
- Berechnen Sie erneut Gravitationskonstante aus dem Ergebnis der Herleitung und unter Verwendung des Anstieges. Geben Sie die Messunsicherheit durch eine Fehlerrechnung (*absolut und relativ*) an.

3. Ergänzung

3.1 vertiefende Fragen

Aufgabe 1: Zwischen zwei Protonen bestehen neben der elektrischen auch die Gravitationswechselwirkung. Vergleichen Sie die Größenordnung beider Wechselwirkungen.

Aufgabe 2: Die Kenntnis der Gravitationskonstante erlaubt die Bestimmung zahlreicher astronomischer Daten (*Tafelwerk verwenden*).

- Drücken Sie beispielsweise die Masse der Erde durch die Gravitationskonstante γ und die Erdbeschleunigung g aus (siehe **Abschnitt 2.3, Aufgabe 1**).
- Bestimmen Sie die Masse der Sonne unter Verwendung des mittleren Abstandes Erde – Sonne und der Umlaufzeit der Erde um die Sonne.