

Es soll die Frequenzabhängigkeit von kapazitiven und induktiven Widerständen untersucht werden. Als Anwendung werden Übertragungsverhältnisse und Phasenverschiebungen an Hoch-, Tief- und Bandpässen gemessen.

1. Theoretische Grundlagen

1.1 Komplexe Darstellung periodischer Größen

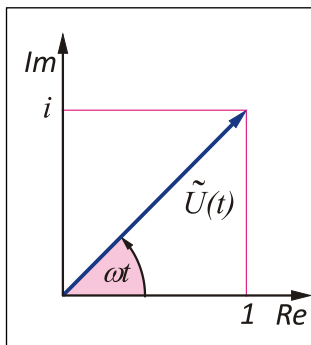


Bild 1: Komplexes Zeigerdiagramm einer harmonisch oszillierenden Spannung $U(t)$

Eine zeitlich periodische Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cdot \cos \omega \cdot t \quad (1)$$

lässt sich mit der Eulerschen Beziehung

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x \quad (2)$$

darstellen als Realteil einer komplexen Größe:

$$U(t) = \operatorname{Re}(U_0 \cdot e^{i\omega \cdot t}). \quad (3)$$

Diese komplexe Größe kann in der Gaußschen Zahlenebene (**Bild 1**) veranschaulicht werden als ein mit der Kreisfrequenz ω in mathematisch positiver Richtung rotierender Zeiger der Länge U_0 .

Es ist nun üblich, statt der Gleichung (3) die Spannung durch die komplexe Größe selbst zu beschreiben:

$$\tilde{U}(t) = U_0 \cdot e^{i\omega \cdot t} \quad (4)$$

und die physikalische Spannung nur als Realteil von Gleichung (4) zu interpretieren. Um dies zu kennzeichnen, werden solche komplexen Größen mit einer Tilde („Schlange“) versehen.

Der Vorteil dieser komplexen Darstellung gegenüber der trigonometrischen Schreibweise periodischer Größen liegt in erheblich vereinfachten Rechnungen, in denen man beispielsweise auf Additionstheoreme für trigonometrische Funktionen ganz verzichten kann.

Bei **Kapazitäten und Induktivitäten im Wechselstromkreis** treten gegenüber Ohmschen Widerständen neue Phänomene auf, z.B. eine **Phasenverschiebung** zwischen Spannung und Strom oder die Tatsache, dass **Verhältnisse von Teilspannungen frequenzabhängig** sind. Diese Phänomene werden in den folgenden Abschnitten beschrieben.

1.2 Kapazität im Wechselstromkreis

Ein Kondensator mit der Kapazität C liegt an einer Wechselspannung Gl. (4). Dann gilt mit der zeitabhängigen Ladung $\tilde{Q}(t)$ des Kondensators:

$$\tilde{U}(t) = \frac{1}{C} \cdot \tilde{Q}(t) \quad (5)$$

Differenziert man nach der Zeit, so erhält man

$$\tilde{U} = \frac{1}{C} \cdot \tilde{Q} = \frac{1}{C} \cdot \tilde{I}. \quad (6)$$

Daraus ergibt sich mit Gl. (4) die zeitabhängige Stromstärke

$$\tilde{I} = i\omega \cdot C \cdot \tilde{U} \text{ mit der Amplitude } I_0 = \omega \cdot C \cdot U_0 \quad (7) \quad (8)$$

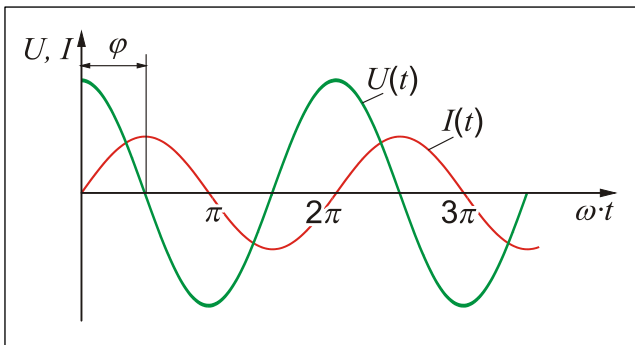


Bild 2a: Phasendiagramm eines Kondensators

Veranschaulicht man sich dieses Ergebnis wieder in der komplexen Zahlenebene, so erkennt man, dass zur Zeit $t=0$ der Zeiger für U in Richtung der reellen Achse, der Zeiger für I in Richtung der imaginären Achse zeigt. Das heißt, der Strom eilt der Spannung beim Kondensator mit einer Phasenverschiebung von 90° voraus (**Bild 2a**).

Man definiert im Wechselstromkreis den Quotienten aus Momentanspannung und -strom als komplexen Widerstand $\tilde{Z}$ und erhält für einen Kondensator

$$\tilde{Z}_C = \frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)} = \frac{1}{i\omega \cdot C} = -i \cdot \frac{1}{\omega \cdot C} \quad (9)$$

Dieser Betrag von $\tilde{Z}$ heißt **Scheinwiderstand** (hier $|\tilde{Z}_C| = \omega^{-1} \cdot C^{-1}$).

Wäre statt des Kondensators ein rein **ohmscher Widerstand R** im Stromkreis, so ist der Strom in Phase mit der Spannung (**Bild 2b**)

$$\tilde{I}(t) = \frac{\tilde{U}(t)}{R} \quad (10)$$

und es ergäbe sich für den Quotienten der reelle Wert

$$\tilde{Z}_R = R \quad (11)$$

Ein **komplexer Widerstand $\tilde{Z}$** verursacht also eine **Phasenverschiebung** zwischen Strom und Spannung. Ist der Imaginärteil von $\tilde{Z}$ null, so ist auch die Phasenverschiebung null.

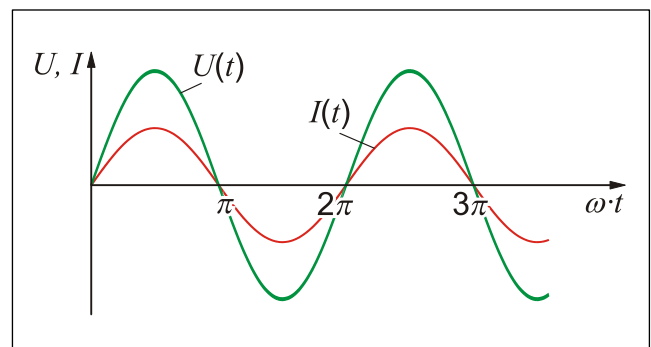


Bild 2b: Phasendiagramm eines rein ohmschen Widerstandes

1.3 Induktivität im Wechselstromkreis

Legt man an eine **Induktivität L** in Form einer Spule eine Wechselspannung Gl. (4), so muss nach dem zweiten Kirchhoffschen Gesetz die Summe der Spannungen im Kreis stets null sein:

$$\tilde{U}(t) + \tilde{U}_{ind}(t) = 0 \quad (12)$$

Die in der Spule induzierte Spannung ist

$$\tilde{U}_{ind}(t) = -L \cdot \ddot{I} \quad (13)$$

Setzt man die Gleichungen (4) und (13) in Gl. (12) ein, so erhält man

$$\tilde{I} = \frac{U_0}{L} \cdot e^{i\omega \cdot t} \quad (14)$$

Der zeitliche Verlauf der Stromstärke ergibt sich dann durch Integration:

$$\tilde{I}(t) = -i \frac{U_0}{\omega \cdot L} \cdot e^{i\omega \cdot t} \text{ mit der Amplitude } I_0 = \frac{U_0}{\omega \cdot L} \quad (15) \quad (16)$$

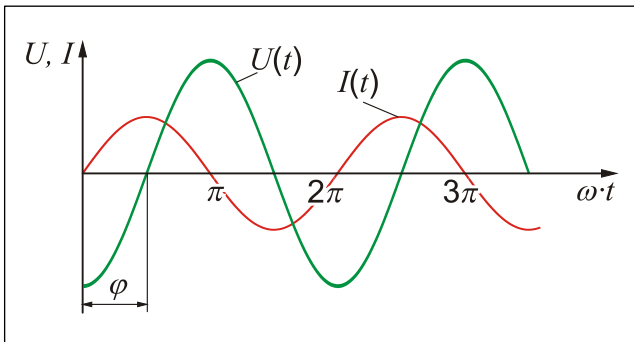


Bild 2c: Phasendiagramm einer Spule

Zurzeit $t=0$ zeigt I jetzt in Richtung der negativen imaginären Achse, der Strom hinkt der Spannung mit einer Phasenverschiebung von 90° nach (**Bild 2c**). Der komplexe Wechselstromwiderstand der Spule ist

$$\tilde{Z}_L = \frac{\tilde{U}(t)}{\tilde{I}(t)} = i\omega \cdot L, \quad (17)$$

wobei $|\tilde{Z}_L| = \omega \cdot L$ ihr **Scheinwiderstand** ist.

1.4 Reihenschaltung von R , C und L

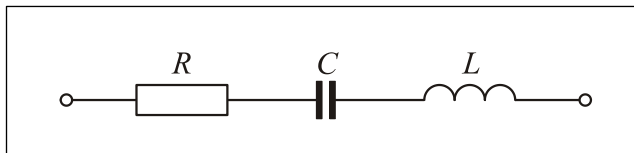


Bild 3a: Reihenschaltung von R , C , und L

Bei der Reihenschaltung eines ohmschen Widerstandes R , einer Kapazität C sowie einer Induktivität L an eine treibende Spannung $\tilde{U}(t)$ gilt zu jeder Zeit das zweite Kirchhoffsche Gesetz in der Form:

$$R \cdot \tilde{I} + \frac{1}{C} \cdot \tilde{Q} = \tilde{U} - L \cdot \ddot{\tilde{I}}. \quad (18)$$

Die zeitliche Ableitung von (18) ergibt

$$L \cdot \ddot{\tilde{I}} + R \cdot \dot{\tilde{I}} + \frac{1}{C} \cdot \tilde{I} = \dot{\tilde{U}}. \quad (19)$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung nach dem Abklingen des Einschwingvorgangs erhält man für den hier nur betrachteten schwach gedämpften Fall eine sinusförmige Funktion, die gegenüber der Erregerfunktion um den Winkel φ phasenverschoben ist. Entsprechend fließt auch in der Schaltung ein harmonisch oszillierender Strom

$$\tilde{I}(t) = I_0 \cdot e^{i(\omega \cdot t - \varphi)}. \quad (20)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (20) und (4) in Gl. (19) erhält man den komplexen Wechselstrom-Widerstand der Reihenschaltung als Summe der komplexen Einzelwiderstände:

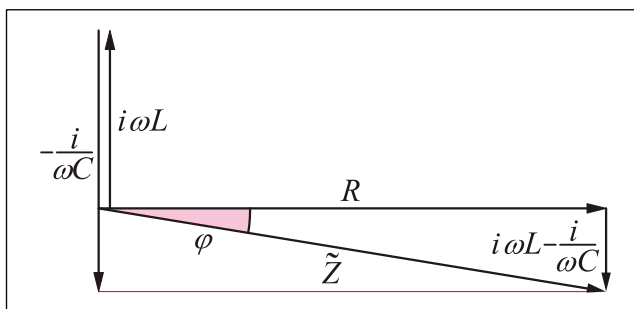


Bild 3b: Addition der komplexen Widerstände

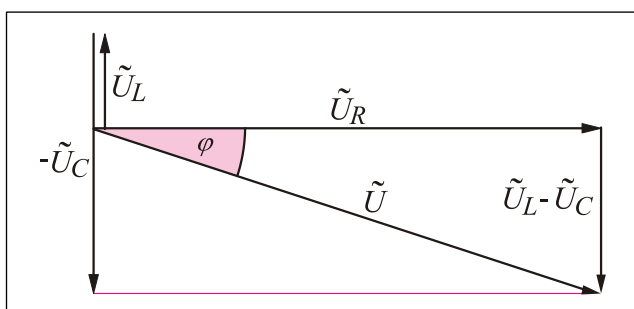


Bild 3c: Zeigerdiagramm für die Teilspannungen

$$\tilde{Z} = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = R + i \cdot \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C} \right). \quad (21)$$

Diese Summe lässt sich auch geometrisch in der komplexen Ebene darstellen.

Da die Stromstärke im Kreis überall gleich ist, kann **Bild 3b** durch Anwendung des Ohmschen Gesetzes auch als Zeigerdiagramm für die Spannungssumme im Kreis aufgefasst werden (**Bild 3c**). Der Strom ist in Phase mit der Teilspannung am ohmschen Widerstand, der Winkel φ gibt demnach die Phasenverschiebung zwischen dem Strom und der äußeren Spannung an. Er lässt sich berechnen aus

$$\tan \varphi = \frac{\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}}{R} . \quad (22)$$

Interessiert man sich nur für den Quotienten der Amplituden von $\tilde{U}(t)$ und $\tilde{I}(t)$, so muss man in Gl. (21) die Beträge betrachten:

$$|\tilde{Z}| = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega \cdot L - \frac{1}{\omega \cdot C}\right)^2} . \quad (23)$$

Der Betrag des komplexen Wechselstromwiderstandes $\tilde{Z}$ wird als **Scheinwiderstand** der Schaltung bezeichnet.

1.5 Wichtige Sonderfälle: RL- und RC-Kreis

Schaltet man einen ohmschen Widerstand entweder mit einer Induktivität oder mit einer Kapazität in Reihe, so erhält man einen *RL-* bzw. einen *RC-Kreis*, den man jeweils als frequenzabhängigen Spannungsteiler betrachten kann, wobei die Eingangsspannung U_e die Gesamtspannung der Reihenschaltung und die Ausgangsspannung U_a eine Teilspannung ist

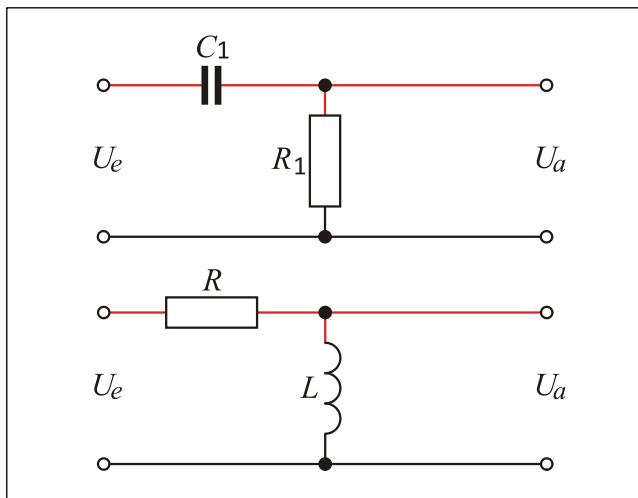


Bild 4a: Hochpass-Schaltungen

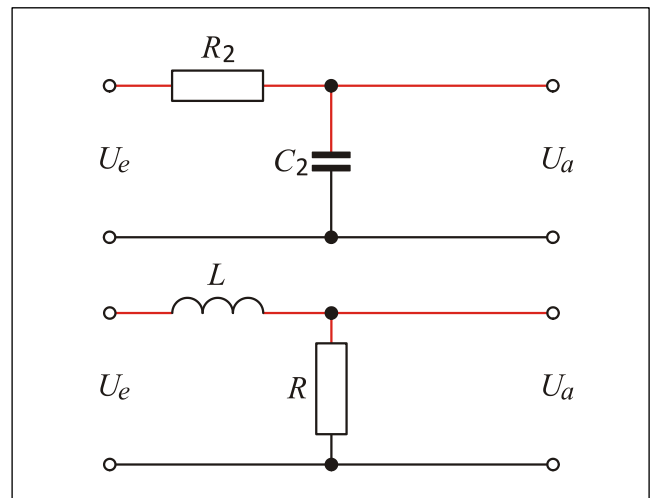


Bild 4b: Tiefpass-Schaltungen

1.5.1 RC-Hochpass

Für die **RC-Schaltung** von **Bild 4a** gilt:

$$\tilde{U}_a = \tilde{U}_e \cdot \frac{R}{\tilde{Z}} = \tilde{U}_e \cdot \frac{R}{R - i \cdot \frac{1}{\omega \cdot C}} = \tilde{U}_e \cdot \frac{1}{1 - \frac{i}{\omega \cdot R \cdot C}} \quad (24)$$

Für das **Übertragungsverhältnis** V und für die Phasenverschiebung φ zwischen Eingangs- und Ausgangsspannung ermittelt man

$$V(\omega) = \left| \frac{\tilde{U}_a}{\tilde{U}_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}}} \quad \tan \varphi = - \frac{1}{\omega \cdot R \cdot C} \quad (25)$$

Für $\omega \rightarrow 0$ wird $V(\omega)$ sehr klein. Bei $\omega \rightarrow \infty$ geht $V(\omega)$ gegen 1. Diese Schaltung lässt also vorwiegend hohe Frequenzen passieren.

1.5.2 RC-Tiefpass

Für die **RC-Schaltung** von **Bild 4b** gilt:

$$\tilde{U}_a = - \frac{1}{\omega \cdot C} \cdot \tilde{I} = \tilde{U}_e \cdot \frac{-\frac{i}{\omega \cdot C}}{\tilde{Z}} = \tilde{U}_e \cdot \frac{1}{1 + i \cdot \omega \cdot R \cdot C} \quad (26)$$

$$V(\omega) = \left| \frac{\tilde{U}_a}{\tilde{U}_e} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \cdot R^2 \cdot C^2}} \quad \tan \varphi = -\omega \cdot R \cdot C \quad (27)$$

$V(\omega)$ wird jetzt maximal für $\omega \rightarrow 0$.

In **beiden Fällen** ist für $\omega = \omega_G = (R \cdot C)^{-1}$ die Phasenverschiebung φ zwischen dem Eingangs- und dem Ausgangssignal gerade 45° und das Übertragungsverhältnis ist $V_{max} = V_{eff} \cdot \sqrt{2}$. Die Frequenz

$$f_G = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \quad (28)$$

heißt **Grenzfrequenz** des Passes.

1.5.3 RC-Bandpass

Durch Reihenschaltung eines Hoch- und Tiefpasses erhält man einen Bandpass (**Bild 5**), der hohe und tiefe Frequenzen sperrt und nur einen begrenzten Frequenzbereich passieren lässt.

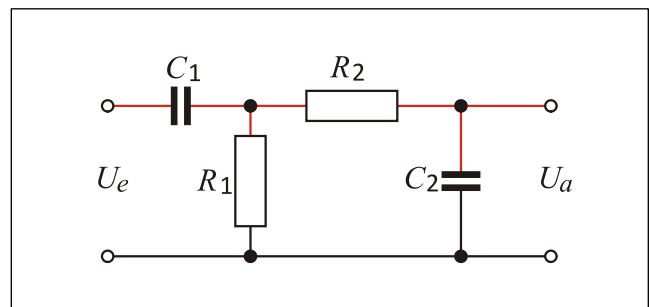


Bild 5: Schaltung eines Bandpasses

Die Ausgangsspannung des Bandpasses ist

$$\tilde{U}_a = \left(\frac{1}{1 - \frac{i}{\omega \cdot R_1 \cdot C_1}} + \frac{1}{1 + i \cdot \omega \cdot R_2 \cdot C_2} \right) \cdot \tilde{U}_e \quad (29)$$

und damit das Übertragungsverhältnis

$$V(\omega) = \left| \frac{1}{1 + \frac{R_2 \cdot C_2}{R_1 \cdot C_1} + i \cdot \left(\omega \cdot R_2 \cdot C_2 - \frac{1}{\omega \cdot R_1 \cdot C_1} \right)} \right| \quad (30)$$

V wird maximal, wenn gilt

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 \cdot R_2 \cdot C_1 \cdot C_2}} \quad (31)$$

1.6 Effektivwerte

Mit Drehspul- und Digitalmessgeräten wird im Allgemeinen nicht die Amplitude einer Wechselspannung oder eines Wechselstromes gemessen, sondern der **Effektivwert**. Unter dem Effektivwert versteht man die Gleichstromstärke, die im zeitlichen Mittel am gleichen Widerstand R die gleiche Leistung erzeugen würde.

Die Momentanleistung eines sinusförmigen Wechselstromes ist

$$P(t) = R \cdot I^2(t) = R \cdot I_0^2 \cdot \sin^2 \omega t. \quad (32)$$

Der zeitliche Mittelwert über eine ganze Anzahl voller Perioden von $\sin^2 \omega t$ ist $\frac{1}{2}$. Daraus folgt:

$$P = \frac{1}{2} \cdot I_0^2 \cdot R. \quad (33)$$

Durch Vergleich mit $P = I_{eff}^2 \cdot R$ ergibt sich

$$I_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \quad \text{bzw.} \quad U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}. \quad (34)$$

2. Versuch

2.1 Vorbetrachtung

Aufgabe: Zu zwei Kondensatoren (**Bild 6**) mit den Kapazitäten $C_1=5 \mu\text{F}$ und $C_2=7,5 \mu\text{F}$ soll ein dritter nach der neben stehenden Schaltung hinzukommen, so dass sich eine Gesamtkapazität von $C_{ges}=9 \mu\text{F}$ ergibt.

- Bestimmen Sie die Kapazität von C_3 .
- Welche Effektivspannungen liegen dann an den drei Kondensatoren an, wenn an der Schaltung eine max. Gesamtspannung von $U_{SS}=5,66 \text{ V}$ angelegt wird? Wie hoch sind die Teilspannungen U_1 und U_2 ?

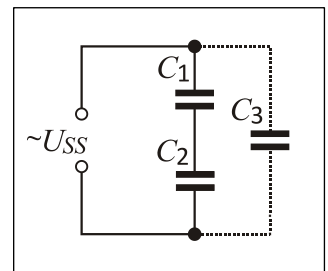


Bild 6: Schaltung

2.2 Versuchsdurchführung

2.2.1 Verwendete Geräte

Zweikanal-Oszilloskop mit Sinusgenerator, 2 Vielfachmessgeräte, Widerstände, Spulen, Kondensatoren

2.2.2 Versuchshinweise

Hinweis zu Aufgabe 1 und 2:

- Messen Sie die Effektivwerte für Stromstärke und Spannung mit den Vielfachmessgeräten.
- Berücksichtigen Sie, dass die Wechselstrom- und Wechselspannungsmessbereiche dieser Geräte nur für ein bestimmtes Messintervall ausgelegt sind. Dadurch sind die im Experiment zu verwendenden Frequenzen beschränkt ($\sim 10 \text{ Hz bis } 100 \text{ kHz}$).

Aufgabe 1: Scheinwiderstand von Kondensatoren

- Bestimmen Sie in einem Wechselstromkreis mit einem Kondensator die Abhängigkeit der Stromstärke von der Kapazität. Auf der Grundlage der Messreihe bekannter Kapazitäten soll die unbekannte Kapazität C_x bestimmt werden.

- Bauen Sie die Messschaltung entsprechend **Bild 7** auf.
- Bestimmen Sie die Stromstärke in Abhängigkeit von der Kapazität durch Wechseln der Kondensatoren. (gegeben: $C=(10 \text{ und } 47) \text{ nF}$, $(0,1; 0,47; 1 \text{ und } 4,7) \mu\text{F}$ sowie C_x)
- Durch die Veränderung der Belastung des Funktionsgenerators ist beim Kondensatorwechsel ein Nachregeln der Ausgangsspannung notwendig!

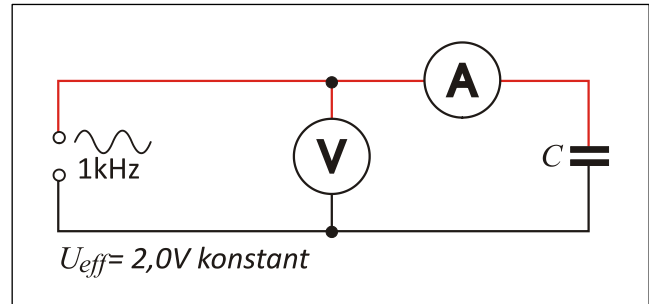


Bild 7: Messschaltung **Aufgabe 1**

Aufgabe 2: Frequenzabhängigkeit eines induktiven Scheinwiderstandes

- Messen Sie bei einer Spule die Abhängigkeit des induktiven Scheinwiderstandes von der Frequenz und bestimmen Sie daraus die Induktivität der Spule.
- Ersetzen Sie den Kondensator durch eine Spule mit **1000Wdg.** (nach Messschaltung **Bild 7**).
- Variieren Sie die Frequenz ($f=(500 \text{ und } 750) \text{ Hz}$ sowie $(1; 2,5; 5; 7,5 \text{ und } 10) \text{ kHz}$) und messen Sie die Stromstärke I_{eff} . Halten Sie dabei die Spannung $U_{eff}=2,0 \text{ V}$ konstant.

Hinweis zu Aufgabe 3 und 4:

Da die Eingangsspannung U_e sowie die Ausgangsspannung U_a für die Durchführung der Aufgaben 3 und 4 gleichzeitig gemessen werden müssen, wird ein Zweikanal-Oszilloskop verwendet. Messen Sie dabei immer die Spitze-Spitze-Spannung U_{SS} und verwenden Sie diese Werte für die weitere Auswertung.

Aufgabe 3: RC-Kreis als Hoch- und Tiefpass

- Bauen Sie den jeweiligen Hoch- bzw. Tiefpass nach **Bild 4a** bzw. **4b** auf.

Passwerte:

a) Hochpass: $R_1=330 \Omega$ $C_1=1 \mu\text{F}$
b) Tiefpass: $R_2=1 \text{ k}\Omega$ $C_2=10 \text{ nF}$

- Schließen Sie an den Kanal 1 des Oszilloskops die Eingangsspannung U_e und an den Kanal 2 die Ausgangsspannung U_a an. Der Frequenzgenerator und die Eingangsspannung werden dabei parallel zueinander geschaltet. Der Generator ist direkt mit dem Oszilloskop ("externe Triggerung") verbunden und trägt somit zur Stabilisierung des Oszilloskopbildes bei.
- Bestimmen Sie in dem RC-Hoch- bzw. Tiefpass die Abhängigkeit vom Übertragungsverhältnis V zwischen der Ausgangsspannung U_a und der Eingangsspannung U_e sowie der Frequenz f . Halten Sie dabei die Spannung $U_e=2,0 \text{ V}_{SS}$ konstant.
- Messen Sie mit Hilfe des Zweikanal-Oszilloskops die Ein- und Ausgangs-Amplituden für die Frequenzen von $f=(50; 100; 500) \text{ Hz}$ sowie $(1; 5; 10; 50; 100) \text{ kHz}$.
- Bestimmen Sie die Phasenverschiebungswinkel φ mittels der Lissajous-Figuren zwischen den Eingangs- und Ausgangsgrößen für den Hochpass bei $f=100 \text{ Hz}$, $(1 \text{ und } 10) \text{ kHz}$ und den Tiefpass bei $f=(1; 10 \text{ und } 100) \text{ kHz}$.

Aufgabe 4: Frequenzgang eines Bandpasses aus RC-Gliedern

- Schalten Sie nun den Hoch- und Tiefpass zu einem Bandpass zusammen und ermitteln Sie die Werte analog zur **Aufgabe 3**.

Die Phasenverschiebung zwischen beiden Signalen kann durch einen direkten Vergleich am Zweikanal-Oszilloskop nur ungenau ermittelt werden. Eine bessere Methode ist die Verwendung einer Lissajous-Ellipse (**Bild 8**).

Stellen Sie am Oszilloskop den Messbereichsschalter (**TIME/DIV**) auf den **x-y-Bereich** ein und positionieren Sie die Lissajous-Ellipse mittig auf dem Bildschirm. Bestimmen Sie aus der Lage dieser entstehenden Ellipse die Phasenverschiebung. Es folgt aus der Parameterdarstellung diese Ellipse mit nicht achsenparallelen Halbachsen

$$\sin \varphi = \frac{p}{q} \quad (35)$$

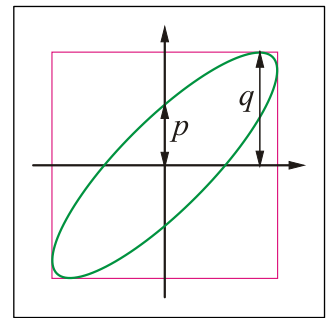


Bild 8: Lissajous Figur zur Bestimmung der Phasenverschiebung

2.3 Versuchsauswertung

Aufgabe 1: Scheinwiderstand von Kondensatoren

- Stellen Sie die Abhängigkeit der Funktion $I_{eff} = f(C)$ auf doppelt-logarithmischem Papier dar.
- Tragen Sie die auf den Kondensatoren angegebene Toleranz als Fehlerbalken ein.
- Bestimmen Sie aus dieser Darstellung C_x einschließlich der Messunsicherheit.

Aufgabe 2: Frequenzabhängigkeit eines induktiven Scheinwiderstandes

- Stellen Sie die Messergebnisse auf doppelt logarithmischem Papier als Funktion $I_{eff} = f(f)$ und $Z_L = f(f)$ graphisch dar. Belegen Sie die y-Achse doppelt (I_{eff} (links) und Z_L (rechts)).
- Berechnen Sie unter Verwendung des Anstiegs der Funktion $Z_L = f(f)$ die Induktivität der Spule.
- Tragen Sie bei der maximalen Abweichung $u(I_{eff})$, den Fehlerbalken an und schließen Sie aus der damit ermittelten relativen Abweichung $u(I_{eff})/I_{eff}$ auf die relative bzw. absolute Messunsicherheit der Induktivität L durch eine Fehlerrechnung.

Aufgabe 3 und 4: Hoch-, Tief- und Bandpass

- Berechnen Sie die Grenzfrequenzen des Hoch- und Tiefpasses nach Gleichung (28).
- Stellen Sie die Übertragungsverhältnisse als Funktionen $V = f(f)$ auf halblogarithmischem Papier graphisch dar (f logarithmisch und $V = U_a/U_e$ linear). Tragen Sie die Grenzverstärkung $V_{eff} = V_{max}/\sqrt{2}$ ein und bestimmen Sie graphisch die jeweilige Grenzfrequenz f_G .
- Vergleichen und diskutieren Sie die Ergebnisse (*Theorie-Praxis-Vergleich*).

3. Ergänzung

Aus RC-Gliedern aufgebaute Bandfilter sind zum Filtern besonders schmaler Frequenzbereiche ungeeignet. Man verwendet stattdessen Filter, die aus LC-Schwingkreisen aufgebaut sind.

Obwohl in einem Wechselstromkreis mit rein imaginärem Widerstand ein Strom fließt, ist aufgrund der Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung die Leistung im zeitlichen Mittel gleich Null. Der Strom in einem solchen Wechselstromkreis wird deshalb „**Blindstrom**“, der imaginäre Widerstand auch „**Blindwiderstand**“ genannt. Für das zeitliche Mittel der Leistung, Wirkleistung genannt, gilt:

$$P_{Wirk} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos \varphi \quad (36)$$