Optimierung dynamischer System

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

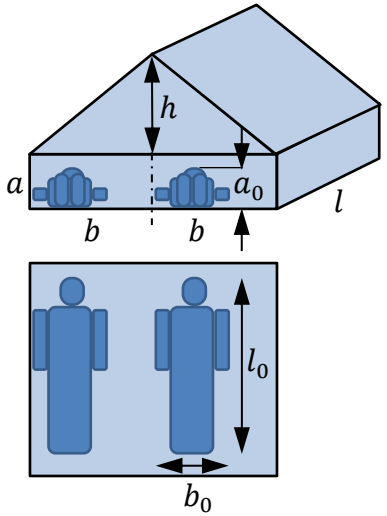
.....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl:	72
zum Bestehen erforderlich:	36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (17 Punkte)

Ein Firstzelt (Länge l, Breite $2b$, Kniestockhöhe a, Firsthöhe h über Kniestock) soll mit möglichst wenig Fläche A des Obermaterials ein möglichst großes Volumen V erhalten. Darin sollen zwei Personen (Länge l_0, Breite b_0, Liegehöhe a_0) Platz bequem die gesamten Liegefläche nutzen können.



a) Formulieren Sie ein geeignetes Optimierungsproblem. (Hinweis: Entwurfsziele müssen zunächst nicht als Funktionen der Entwurfsvariablen berechnet werden!)

$Entwurfsvariablen$: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$Entwurfsziele$: _ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ _

b) Begründen Sie folgende Nebenbedingungen verbal?

$l \geq l_0$: _

_ _

$a \geq a_0$: _

_ _

$b \geq b_0$: _

_ _

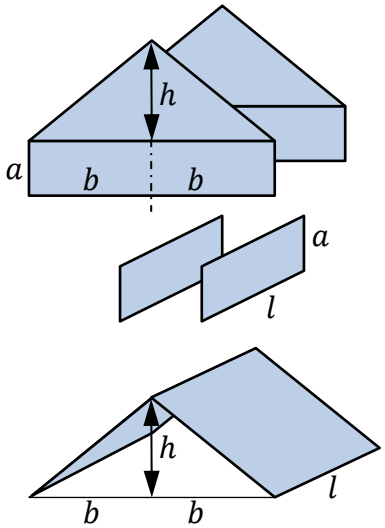
$h \geq 0$: _

_ _

c) Wie groß ist das Zeltvolumen?

$V =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

d) Wie groß ist die Fläche des Obermaterials? Machen Sie in Ihrer Berechnung die gezeigten Teilflächen als einzelne Terme sichtbar.



$A =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$+$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

$+$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

e) Was ist der Unterschied zwischen Pareto-Front und Pareto-optimalen Lösungen?

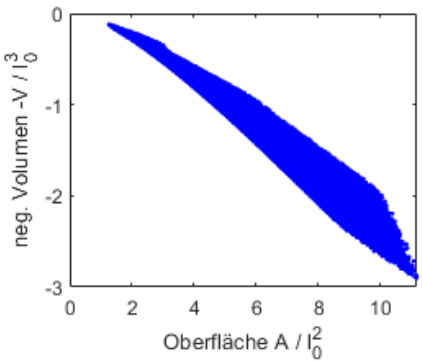
_ _

_ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

f) Nebenstehendes Bild zeigt zulässige Lösungen im Kriterienraum. Zeichnen Sie die Pareto-Front ein.



g) Wie beurteilen Sie zur Lösung des Optimierungsproblems in Teilaufgabe a,b) das Ersatzproblem $\min[wA + (1-w)(-V)]$, $w \in [0,1]$,?

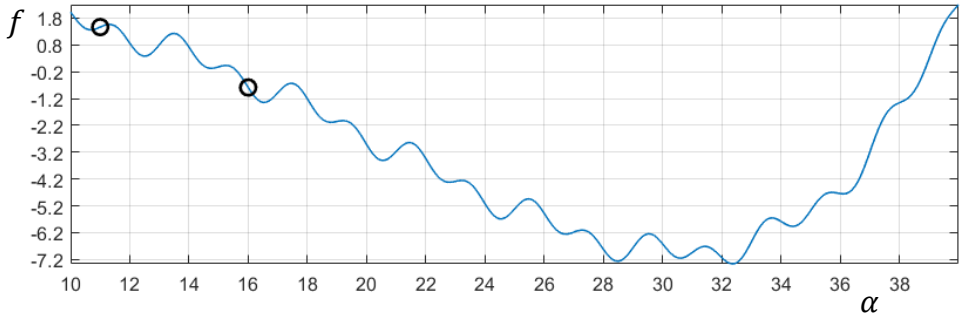
☐ *geeignet*, ☐ *uneeignet*

weil _

_ _

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Auf die abgebildete Funktion $f(\alpha)$ soll die Liniensuche nach dem Minimierer mit dem Goldenen-Schnitt Algorithmus angewandt werden.



a) Suchen Sie zunächst ein Einschließungsintervall für den Minimierer α^* ausgehend von den eingezeichneten Anfangspunkten. Welches erste sichere Einschließungsintervall erhält man am Ende der Suche? Setzen Sie die Funktionswerte f_i jeweils in Relation zum Funktionswert der vorangegangenen Funktionsauswertung f_{i-1}.

i	1	2	3	4
α_i	11	16		
Relation	f_i	$f_2 < f_1$		

$\rightarrow \alpha^* \in [$ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ $]$

b) Führen Sie ausgehend vom gefundenen Einschließungsintervall zwei Intervallteilungsschritte nach den Goldenen-Schnitt Regeln aus und geben Sie das Ergebnisintervall an, in dem der Minimierer α^* sicher liegt.

Iteration	*Einschließungsintervall*		*Zwischenpunkte*	
	α_{LINKS}	α_{RECHTS}	α_{links}	α_{rechts}
0				
1				

$\rightarrow \alpha^* \in [$ _ _ _ _ _ _ , _ _ _ _ _ _ $]$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Die zu minimierende Gütefunktion eines unrestringierten Optmierungsproblems lautet

$$f(\boldsymbol{p}) = p_1 + \frac{p_1}{p_2} + p_1 p_3$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) Welcher Gradient ergibt sich am Entwurfspunkt $\boldsymbol{p}_0 = [1 \quad 2 \quad 3]^T$?

☐ $\nabla f_0 = \begin{bmatrix} 9/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$, ☐ $\nabla f_0 = \begin{bmatrix} -1/4 \\ 9/2 \\ 1 \end{bmatrix}$, ☐ $\nabla f_0 = \begin{bmatrix} -9/2 \\ -1/4 \\ 1 \end{bmatrix}$

c) Welche Hessematrix ergibt sich am Entwurfspunkt $\boldsymbol{p}_0$?

$$\nabla^2 f_0 = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad \end{bmatrix}$$

d) Wie lautet die Inverse der Hessematrix am Entwurfspunkt?

☐ $(\nabla^2 f_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ☐ $(\nabla^2 f_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $(\nabla^2 f_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/16 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$, ☐ $(\nabla^2 f_0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1/4 \end{bmatrix}$

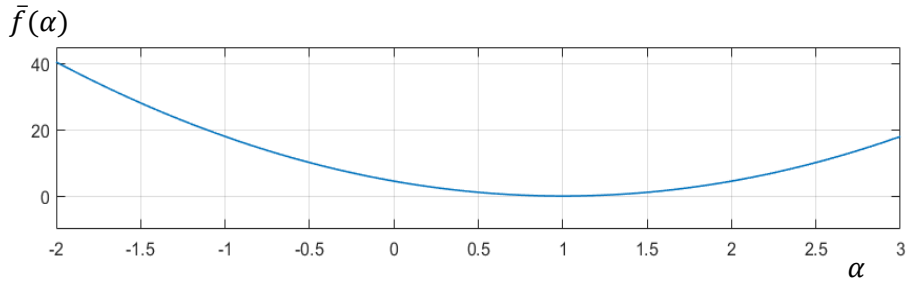
a) Welche Suchrichtung in $\boldsymbol{p}_0$ würde das Newton-Verfahren für den nächsten Iterationsschritt vorschlagen?

$$\boldsymbol{s}_0 = \underbrace{\_\_\_\_\_}_{Formel} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

e) Bestimmen Sie den Vektor der Liniensuche an der Stelle $\boldsymbol{p}_0$ in Richtung von $\boldsymbol{s}_0$.

$$\boldsymbol{p}(\alpha) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

f) Im nachfolgenden Diagramm ist die Funktion der Liniensuche dargestellt. Markieren sie im Diagramm den für das Newton-Verfahren zulässigen Bereich der Liniensuche und das Ergebnis α^*.



Aufgabe 4 (18 Punkte)

Das Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P}(-p_1p_2) \;\; mit\; P = \left\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{bmatrix} p_1+p_2^2-2 \\ -p_1 \\ -p_2 \end{bmatrix} \le \mathbf{0}\right\}$$

soll mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker Bedingung gelöst werden.

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion?

☐ $L = -p_1p_2$ ☐ $L = -\mu_1(p_1+p_2^2-2)+\mu_2p_1+\mu_3p_2$

☐ $L = -p_1p_2-\mu_1(p_1+p_2^2-2)+\mu_2p_1+\mu_3p_2$

b) Wie lauten die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für obiges Problem?

$\frac{\partial L}{\partial p_1} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0$

$\frac{\partial L}{\partial p_2} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0$

$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\ge 0,\quad \mu_1h_1 =$ _ _, μ_1_ _ _ _

$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\ge 0,\quad \mu_2h_2 =$ _ _, μ_2_ _ _ _

$\frac{\partial L}{\partial \mu_3} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $\ge 0,\quad \mu_3h_3 =$ _ _, μ_3_ _ _ _

c) Durch die Nebenbedingungen $h_i(\boldsymbol{p}) \le 0$ ergeben sich 8 Fälle. Ergänzen Sie die nachfolgenden Tabelle (a = aktiv, i = inaktiv).

Fall	1	2	3	4	5	6	7	8
$h_1 \le 0$	a	a	a	a				
$h_2 \le 0$	a	i	i	a				
$h_3 \le 0$	a	i	a	i				

d) Reduzieren Sie die KKT-Bedingungen für den Fall 1 und bestimmen Sie eine mögliche Lösung.

$\frac{\partial L}{\partial p_1} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0,\quad \frac{\partial L}{\partial p_2} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0$

$\Rightarrow\; \mathbf{p}_1^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

☐ potenzielle Lösung

☐ Annahme bez. Nebenbedingungen falsch

☐ falsche Lagrange Multiplikatoren

e) Reduzieren Sie die KKT-Bedingungen für den Fall 2 und bestimmen Sie eine mögliche Lösung.

$\frac{\partial L}{\partial p_1} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0,\quad \frac{\partial L}{\partial p_2} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0$

$\Rightarrow\; \mathbf{p}_2^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix},\; \boldsymbol{\mu}_2^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

☐ potenzielle Lösung

☐ Ann. bez. NB falsch

☐ falsche Lagr. Multipl.

f) Reduzieren Sie die KKT-Bedingungen für den Fall 3 und bestimmen Sie eine mögliche Lösung.

$\frac{\partial L}{\partial p_1} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0,\quad \frac{\partial L}{\partial p_2} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ $= 0$

$\Rightarrow\; \mathbf{p}_3^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix},\; \boldsymbol{\mu}_3^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

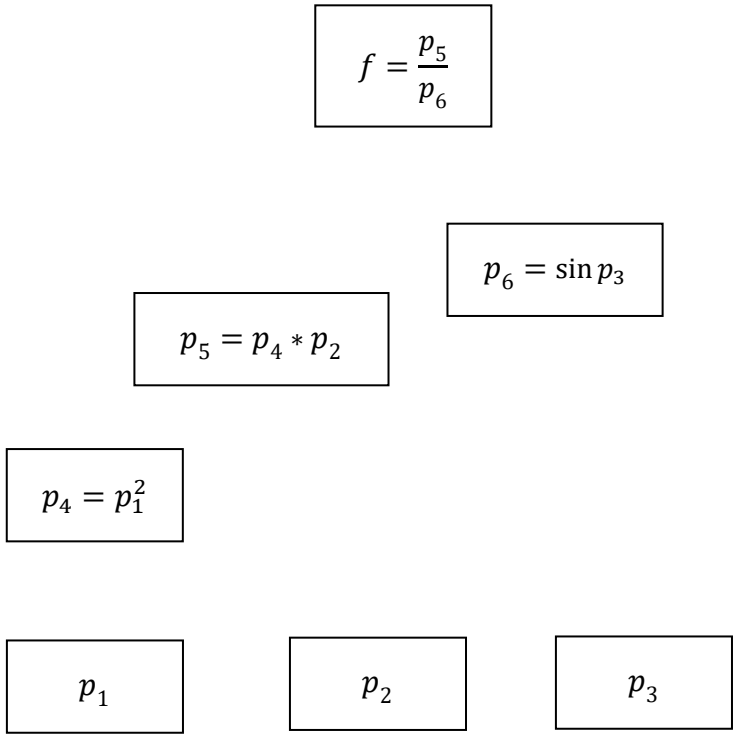
☐ potenzielle Lösung

☐ Ann. bez. NB falsch

☐ falsche Lagr. Multipl.

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Folgender Graph zeigt den Aufbau einer Funktion $f(p_1, p_2, p_3)$ aus Elementarfunktionen:



a) Ergänzen Sie die Kanten des Funktionsgraphen.

b) Welche Funktion wird damit berechnet?

$f(p_1, p_2, p_3) =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _

c) Schreiben Sie jeweils die entsprechenden partiellen Ableitungen der Elementarfunktionen an die Kanten des Funktionsgraphen.

d) Erstellen Sie einen Graphen zur Berechnung von ∇f im Rückwärtsmode des Automatischen Differenzierens

$Initialisierung$:

$Graph$:

e) Wie lautet damit der Gradient in Abhängigkeit der Eingangsvariablen?

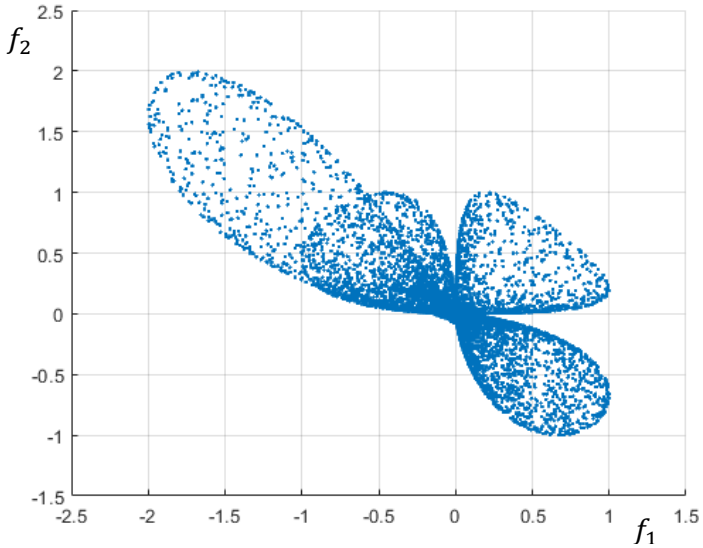
$$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Die Abbildung von 10^4 mittels Latin Hypercube Sampling erzeugten Entwurfspunkten eines komplexen Optimierungsproblems liefert die nachfolgenden Bilder der erreichbaren Punkte im Kriterienraum. Markieren Sie in den Abbildungen jeweils die Pareto-Front für die folgenden bikriteriellen Optimierungsprobleme:

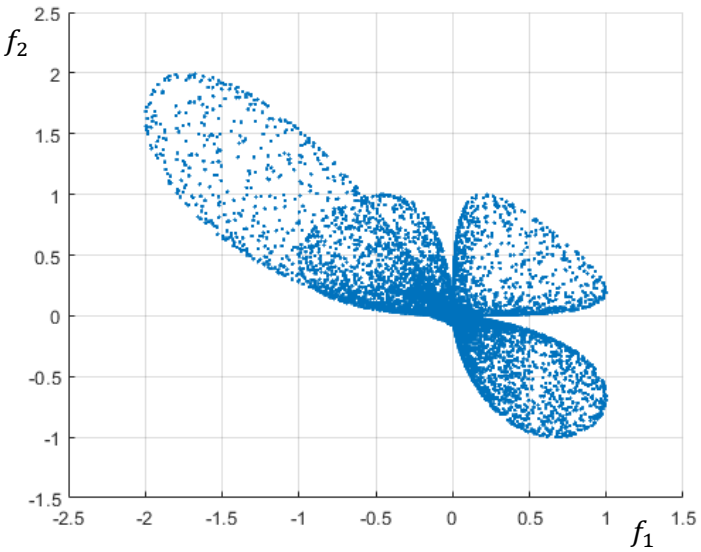
a)

$$\begin{bmatrix} \min f_1 \\ \min f_2 \end{bmatrix}$$



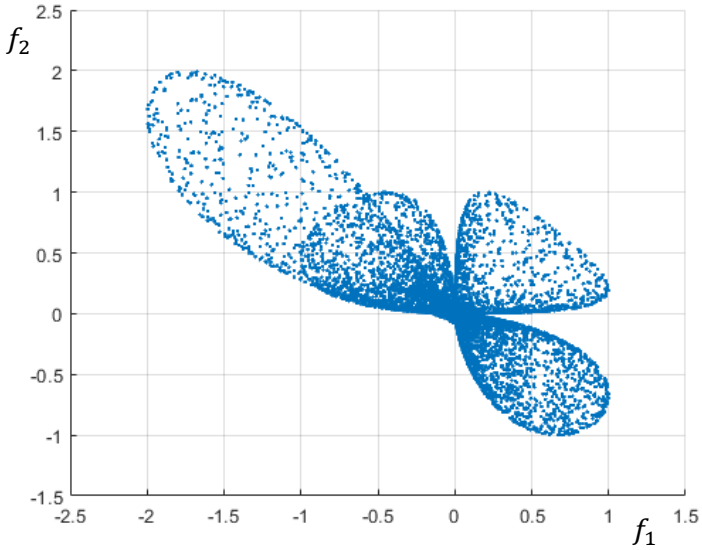
b)

$$\begin{bmatrix} \min f_1 \\ \max f_2 \end{bmatrix}$$



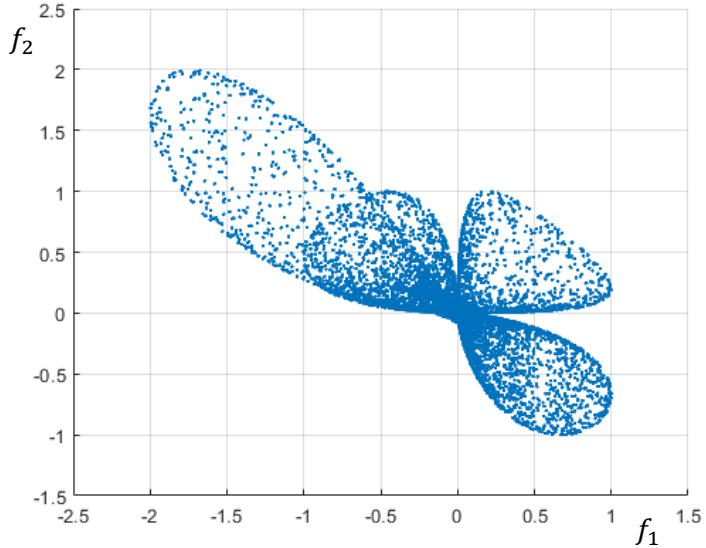
c)

$$\begin{bmatrix} \max f_1 \\ \min f_2 \end{bmatrix}$$



d)

$$\begin{bmatrix} \max f_1 \\ \max f_2 \end{bmatrix}$$



ENDE