Prüfung
Optimierung dynamischer Systeme

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner; keine Mobiltelefone!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

.....
(Unterschrift)

Punkte	Note	

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Nebenstehende Tabelle zeigt verschiedene Fernsehgeräte i mit Preisangabe P_i und Jahresenergieverbrauch E_i. Der Kunde hat 900 € zur Verfügung.

i	P_i in [€]	E_i in [kWh]
1	788	27
2	399	60
3	999	30
4	449	40
5	969	45
6	679	52
7	879	35
8	599	50

a) Formulieren Sie ein sinnvolles Optimierungsproblem für den Kunden:

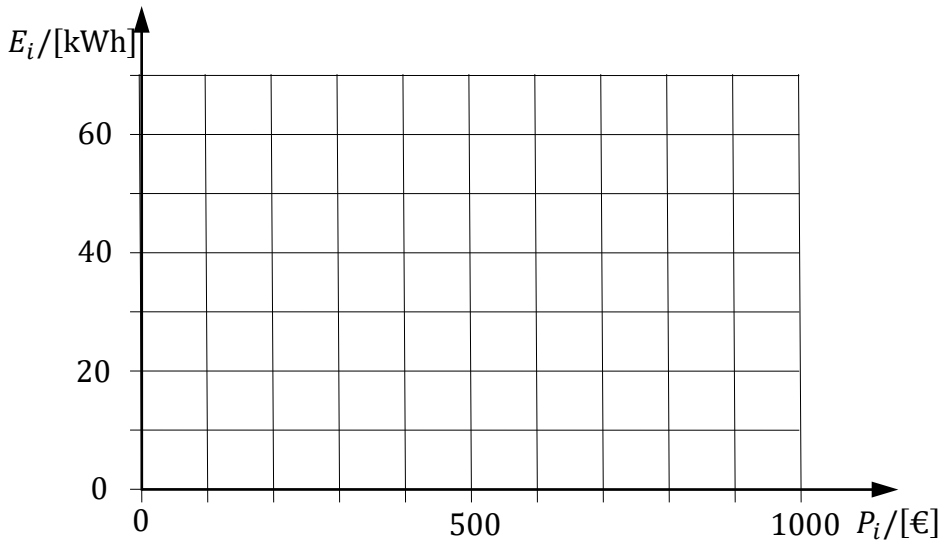
Entwurfsvariable: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Entwurfsziele: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

_ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

Nebenbedingung: _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

b) Tragen Sie **zulässige** Fernsehgeräte in den Kriterienraum ein und bezeichnen Sie die Punkte jeweils durch den Index i des Geräts.



c) Welche Geräte sind für den Kunden optimal?

$i \in \{ \qquad \}$

d) Bestimmen Sie die utopische Lösung $\boldsymbol{f}^0 = [P^0 \quad E^0]^{\mathrm{T}}$ unter Beachtung aller zulässigen Fernsehgeräte.

$$\boldsymbol{f}^0 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

e) Wie lautet die Ersatzgütefunktion für die Distanzmethode mit relativer Abweichungen von der utopischen Lösung unter Verwendung der euklidischen Norm?

☐ $u_i = \sqrt[3]{\left(\frac{P_i - P^0}{P^0}\right)^3 + \left(\frac{E_i - E^0}{E^0}\right)^3}$

☐ $u_i = \sqrt{\left(\frac{P_i - P^0}{P^0}\right)^2 + \left(\frac{E_i - E^0}{E^0}\right)^2}$

☐ $u_i = \sqrt{(P_i - P^0)^2 + (E_i - E^0)^2}$

☐ $u_i = w_1 P_i + w_2 E_i$

f) Bestimmen Sie für alle Pareto-optimalen Entwürfe den Wert der Ersatzgütefunktion.

$u_{___} =$_____ , $u_{___} =$_____ , $u_{___} =$_____

g) Bestimmen Sie das Optimum im Sinne dieses Ersatzkriteriums.

$i =$_____

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Die zu minimierende Gütefunktion eines restringierten Optimierungsproblems lautet

$$f(\boldsymbol{p}) = p_1 \ln p_1 + \cos(\pi p_2) + p_2^2$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 f = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) Wie lauten Gradient und Hessematrix im Entwurfspunkt $\boldsymbol{p}_0 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$?

☐ $\nabla f_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1-\pi \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2-\pi^2 \end{bmatrix}$

☐ $\nabla f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2-\pi^2 \end{bmatrix}$

☐ $\nabla f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f_0 = \begin{bmatrix} 1-\pi & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

☐ $\nabla f_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f_0 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2-\pi^2 \end{bmatrix}$

c) Welche Suchrichtung in $\boldsymbol{p}_0$ würde das Newton-Verfahren für den nächsten Iterationsschritt vorschlagen?

$$\boldsymbol{s}_0 = \underset{\text{(Formel)}}{_____} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

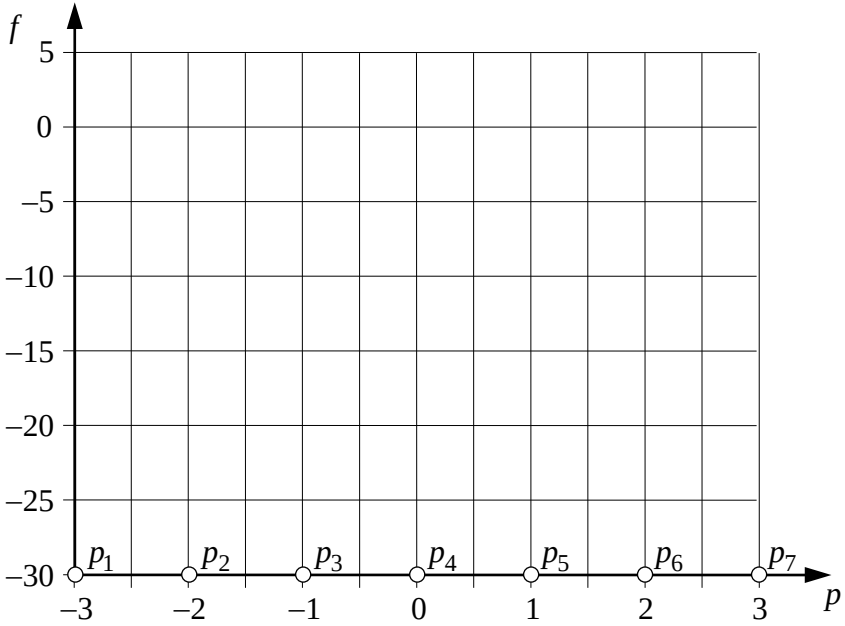
Aufgabe 3 (17 Punkte)

Eine einparametrige Funktion

$$f_1(p) = p^4 - 9p^2 - p$$

soll im Intervall $p \in [-3{,}3]$ minimiert werden.

a) Berechnen Sie die Funktionswerte an den, in untenstehendem Diagramm markierten Stützstellen p_i, tragen Sie die Punkte ein und skizzieren Sie die Funktion $f_1(p)$.



b) Welche lokalen Minimierer lassen sich daraus schätzen?

$p_\mathrm{lokal} \approx$ ☐p_1 ☐p_2 ☐p_3 ☐p_4 ☐p_5 ☐p_6 ☐p_7

c) Welcher davon ist der globale Minimierer von $f_1(p)$?

$p_\mathrm{global} \approx$ ☐p_1 ☐p_2 ☐p_3 ☐p_4 ☐p_5 ☐p_6 ☐p_7

d) Zeichnen Sie in obiges Diagramm zusätzlich die Funktion

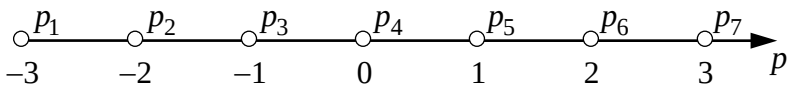
$$f_2(p) = -(p+1)^2 - 3$$

mit den Stützstellen p_i ein, die ebenfalls minimiert werden soll.

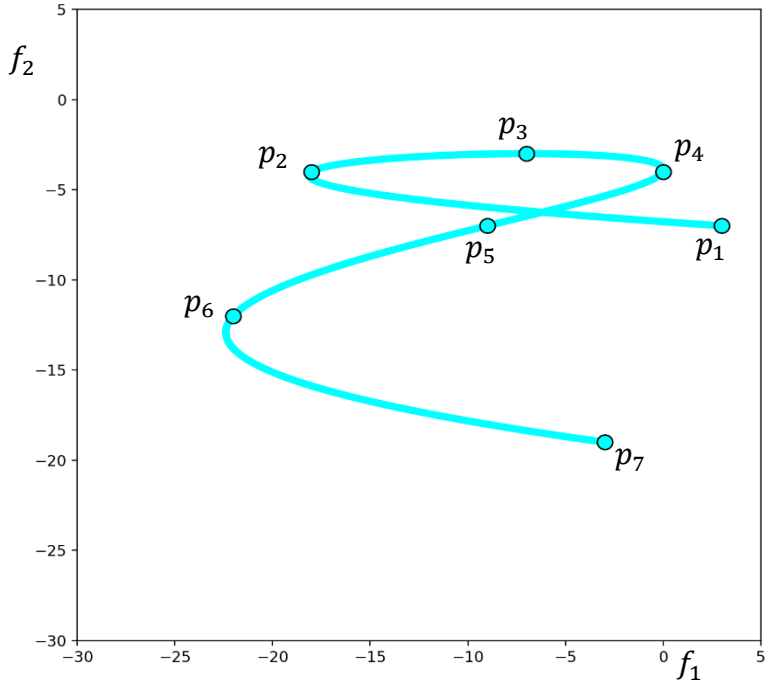
e) Zu welchem Ergebnis führen Wettkampfvergleiche, wenn jeweils der im Sinne des Vektorkriteriums $\boldsymbol{f} = [f_1 \quad f_2]^\mathrm{T}$ dominierende Entwurf gewinnt?

Wettkampf	unentschieden	bzw. Gewinner
$p_1 \leftrightarrow p_2$	☐	_ _ _ _ _ _ _
$p_2 \leftrightarrow p_3$	☐	_ _ _ _ _ _ _
$p_2 \leftrightarrow p_6$	☐	_ _ _ _ _ _ _

f) Markieren Sie die Abschnitte auf der p-Achse, die **lokal** Pareto-optimal sind.



g) Die Abbildung zeigt die beiden Funktionen im Kriterienraum. Markieren Sie den Bereich der **globalen** Pareto-Optima.



Aufgabe 4 (13 Punkte)

Der Gradient der Funktion

$$f(\boldsymbol{p}) = \cos^2 p_1 + \ln(p_1 p_2)$$

soll mithilfe des Automatischen Differenzierens berechnet werden.

a) Ergänzen Sie den Funktionsgraphen um die entsprechenden Elementarfunktionen und Kanten.

$f =$ _ _ _ _ _ _

$p_5 =$ _ _ _ _ _ _

$p_6 =$ _ _ _ _ _ _

$p_3 =$ _ _ _ _ _ _

$p_4 =$ _ _ _ _ _ _

p_1

p_2

b) Schreiben Sie jeweils die entsprechenden partiellen Ableitungen der Elementarfunktionen an die Kanten des obigen Funktionsgraphen.

c) Ergänzen Sie den Graphen der Gradientenberechnung im Vorwärtsmode durch Kanten und Zwischenergebnisse.

$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$\nabla p_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$\nabla p_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

d) Wie lautet damit der Gradient in Abhängigkeit der Eingangsvariablen?

$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Die Funktion $f(\boldsymbol{p})$ aus Aufgabe 3 soll minimiert werden. Mit den Nebenbedingungen $h_1 = 1 - p_1 \leq 0$ und $h_2 = \sqrt{p_1 + 1} - p_2 \leq 0$ sollen dafür die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen formuliert werden. Das Problem lautet in Standardform

$$\min_{\boldsymbol{p} \in P} [p_1 \ln p_1 + \cos(\pi p_2) + p_2^2]$$

$$mit\ P = \left\{ \boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{bmatrix} 1 - p_1 \\ \sqrt{p_1 + 1} - p_2 \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{0} \right\}.$$

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems?

$L =$ _____

_____

b) Wie lauten die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für obiges Problem?

$\frac{\partial L}{\partial p_1} =$ _____ $= 0$

$\frac{\partial L}{\partial p_2} =$ _____ $= 0$

$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} =$ _____ $\geq 0, \quad \mu_1 h_1 =$ ___ , μ_1 ___

$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} =$ _____ $\geq 0, \quad \mu_2 h_2 =$ ___ , μ_2 ___

c) Wie viele Fälle sind zu untersuchen?

☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 16 ☐ 32

d) Reduzieren Sie die KKT-Bedingung auf den Fall, dass die Nebenbedingung h_1 aktiv und die Nebenbedingung h_2 inaktiv ist.

$\frac{\partial L}{\partial p_1} =$ _____

$\frac{\partial L}{\partial p_2} =$ _____

$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} =$ _____

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die Abbildung von 10^6 zufällig gewählten Entwurfspunkten aus dem zulässigen Entwurfsraum

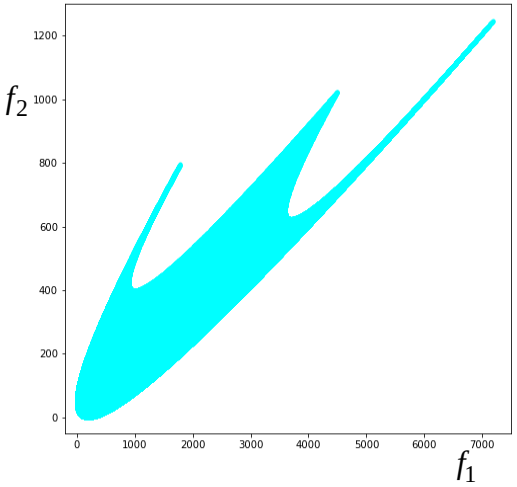
$$P = \{\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^2 | -15 \leq p_i \leq 30\}$$

mit der Vektorfunktion

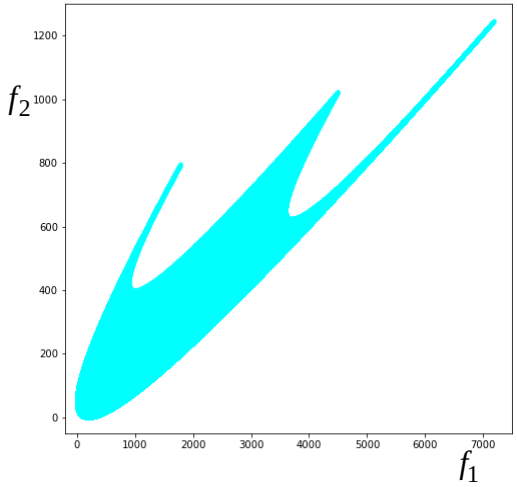
$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{p}) \\ f_2(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4p_1^2 + 4p_2^2 \\ (p_1 - 5)^2 + (p_2 - 5)^2 \end{bmatrix}$$

liefert die nachfolgenden Bilder der erreichbaren Punkte im Kriterienraum. Markieren Sie in den Abbildungen jeweils die Pareto-optimale Front für folgende bikriterielle Optimierungsprobleme:

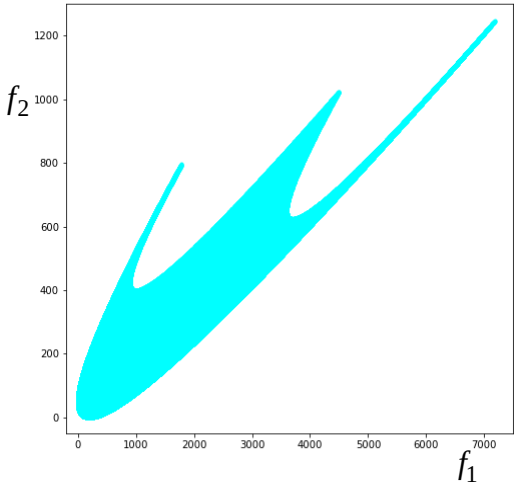
a) $\begin{bmatrix} \min\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_1 \\ \min\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_2 \end{bmatrix}$



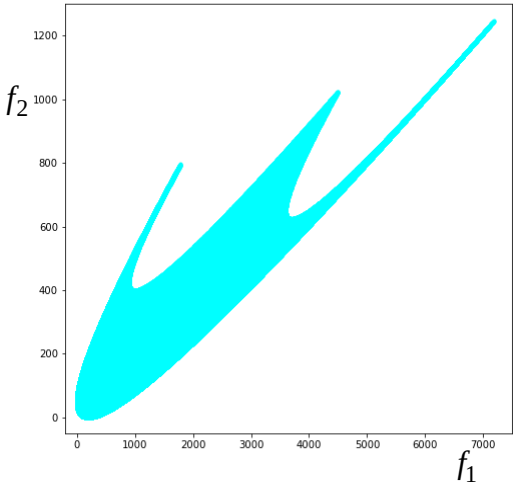
b) $\begin{bmatrix} \min\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_1 \\ \max\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_2 \end{bmatrix}$



c) $\begin{bmatrix} \max\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_1 \\ \min\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_2 \end{bmatrix}$



d) $\begin{bmatrix} \max\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_1 \\ \max\limits_{\boldsymbol{p} \in P} f_2 \end{bmatrix}$



E N D E