Prüfung
Optimierung dynamischer System

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 5 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

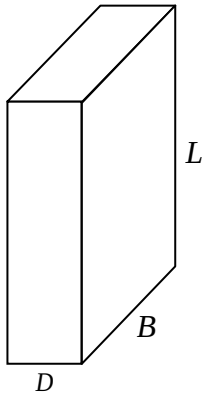
.....
(Unterschrift)

Punkte	Note	

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Aufgabe 1 (15 Punkte)

Ein amerikanischer Geschäftsmann möchte möglichst viele Glasmurmeln in einem quaderförmigen Paket (Dicke D, Breite B, Länge L) versenden. Ein dort ansässiger Paketversand hat folgende Regeln:



1. Die Mindestmaße für Dicke, Breite und Länge sind ¼, 3 und 6 inch.
2. Die Länge und der Umfang quer dazu dürfen in der Summe 108 inch nicht überschreiten.
3. Länge bezeichnet die größte, Dicke die kürzeste Kantenlänge des Quaders.

a) Formulieren Sie ein sinnvolles Optimierungsproblem, um die günstigsten Paketmaße festzulegen (Zahlenangaben dürfen ohne Einheiten erfolgen).

Entwurfsvariablen: _____

Entwurfsziel: _____

Nebenbedingungen: _____, _____,

_____, _____,

_____, _____

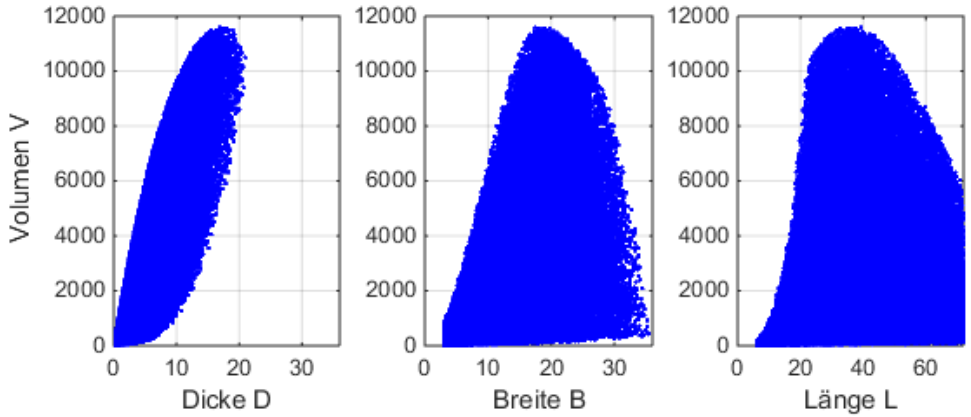
b) Wie lautet dieses Optimierungsproblem in Standardform?
(Setzen Sie alle Berechnungsformeln explizit ein)

$$\min_{\mathbf{p}\in P} \; ----------$$

$$mit \;\; P = \left\{ \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{--} \;\middle|\; \begin{bmatrix} \qquad\qquad \\ \qquad\qquad \end{bmatrix} \le \mathbf{0}\,, \; \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \le \mathbf{p} \le \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \right\}$$

c) Folgende Abbildungen zeigen jeweils das Paketvolumen V als Funktion der drei Kantenlängen für zufällig gewählte, aber zulässige Kombinationen der Kantenlängen. Wie sind die optimalen Paketmaße?

$D_{opt} =$ _____, $B_{opt} =$ _____, $L_{opt} =$ _____.



d) Welche optimale Form hat das Paket nach den Regeln der Aufgabenstellung?

☐ *Würfel* ☐ *Prisma mit quadratischem Querschnitt* ☐ *Kugel*

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Für ein skalares Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P}\left[(p_1-1)^2+p_2^{\,2}\right] \quad mit \quad P=\left\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, p_2-p_1=0,\ p_1-1\le 0\right\}$$

sollen die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen formuliert werden.

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems?

$L =$ _____

b) Wie lauten die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für obiges Problem?

___ = _____ = 0

___ = _____ = 0

___ = _____ = 0,

___ = _____ ≥ 0, _____ = 0, ___ ≤ 0

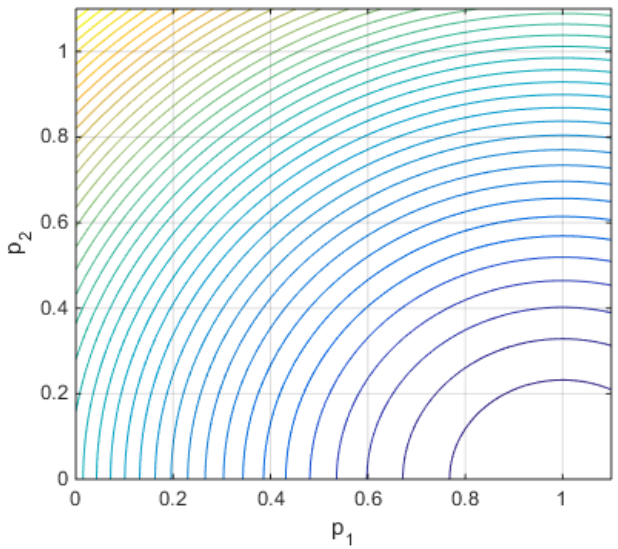
c) Wie viele Fälle sind zu untersuchen?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

d) Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in das nebenstehende Bild ein.

e) Zeichnen Sie die Lösung $\mathbf{p}^*$ des restringierten Optimierungsproblems ein und geben Sie deren Koordinaten an.

$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$



f) Klassifizieren sie den Status der Nebenbedingungen im Minimierer $\mathbf{p}^*$.

NB	$p_2 - p_1 = 0$	$p_1 - 1 \le 0$
verletzt	☐	☐
aktiv	☐	☐
inaktiv	☐	☐

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Das Problem aus Aufgabe 2 lässt sich dadurch vereinfachen, dass man mithilfe der Gleichungsnebenbedingung die Variable $p_2 = p_1$ eliminiert.

a) Wie lautet das reduzierte Optimierungsproblem in Standardform?

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P} \; _____ \quad mit \;\; P = \left\{ p_1 \in \mathbb{R} \;\middle|\; _____ \right\}$$

b) Wie lautet die zugehörige Lagrange-Funktion?

$$L = _____$$

c) Formulieren Sie die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen.

$$___ = _____ = 0$$

$$___ = _____ \geq 0, \qquad _____ = 0, \qquad ___ \leq 0$$

d) Bestimmen Sie die optimale Lösung unter der Annahme, dass die Ungleichung inaktiv ist.

Rechenweg:

$$\Rightarrow \; p_1^* \equiv p_2^* = _____$$

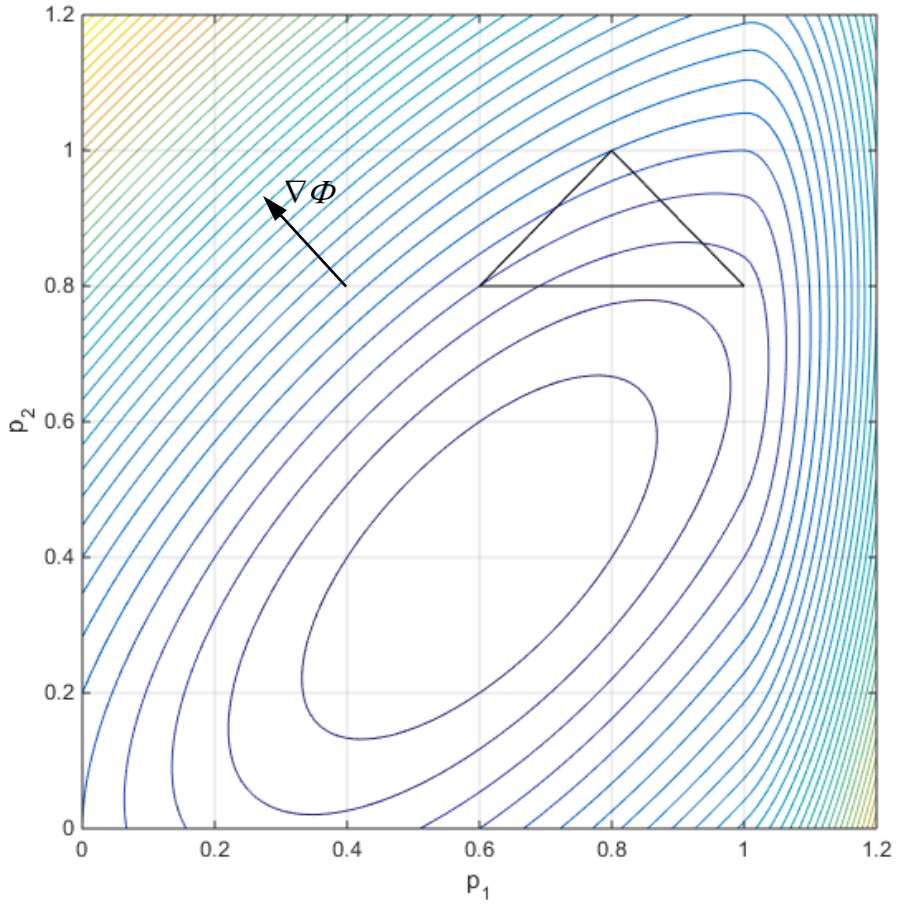
Aufgabe 4 (9 Punkte)

Das Problem aus Aufgabe 2 lässt sich auch mit der SUMT lösen. Mit geeigneten Werten für die Penalty-Faktoren erhält man das unrestringierte Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{p}\in \mathbb{R}^2} \Phi(\boldsymbol{p})$$

$$mit \; \Phi(p_1, p_2) = (p_1 - 1)^2 + p_2^{\,2} + 2(p_2 - p_1)^2 + 30\left[max\{0, (p_1 - 1)\}\right]^2 .$$

a) Das Bild zeigt die Höhenlinien von $\Phi(p_1, p_2)$. Führen Sie graphisch drei vollständige Iterationsschritte des Simplex-Agorithmus von Nelder und Mead mit den Standardeinstellungen $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 2$ durch. Machen Sie auch überprüfte Zwischenpunkte sichtbar.



b) Welche Lösung würde der Algorithmus nach einer genügend langen Iteration finden

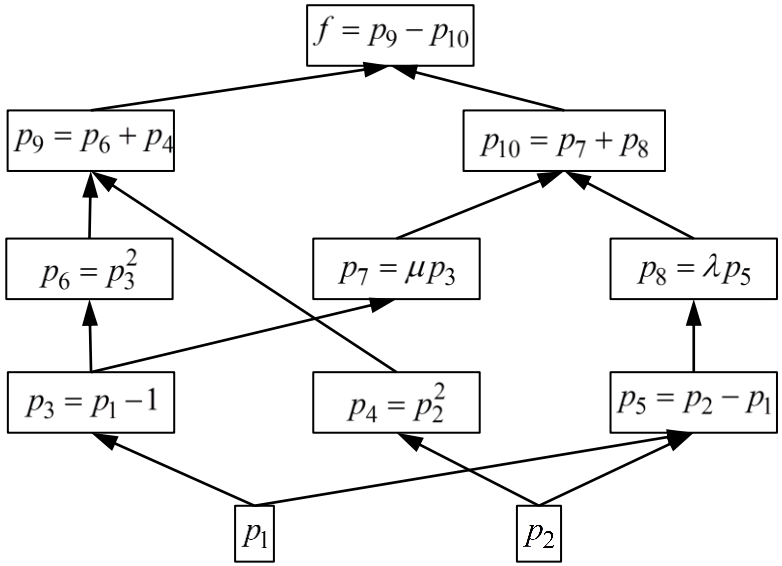
$$\mathbf{p}^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Erfüllt dieser Punkt die Nebenbedingungen des Originalproblems aus Aufgabe 2?

☐ *nur Gleichung* ☐ *nur Ungleichung* ☐ *beide* ☐ *keine*

d) Durch welche Maßnahme könnte man hier die Erfüllung von Nebenbedingungen verbessern?

_____



Aufgabe 5 (15 Punkte)

Nebenstehender Graph zeigt den Aufbau einer Funktion $f(p_1, p_2)$ aus Elementarfunktionen, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$ konstante Parameter sind.

a) Welche Funktion wird damit berechnet?

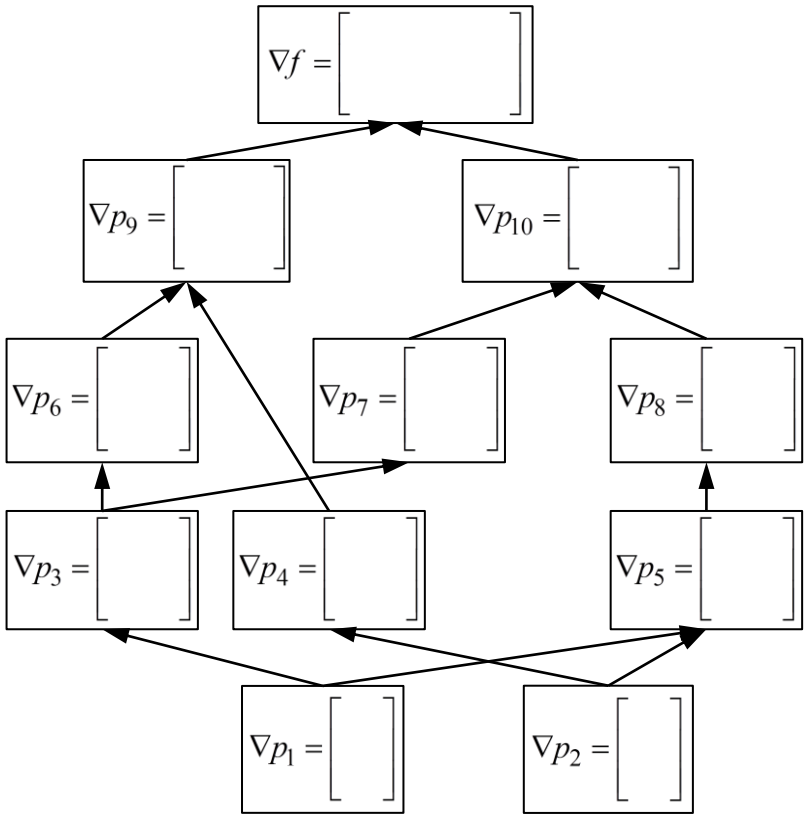
$f(p_1, p_2) =$ _____

b) Schreiben Sie jeweils die entsprechenden partiellen Ableitungen der Elementarfunktionen an die Kanten des Funktionsgraphen.

c) Vervollständigen Sie den Graphen zur Berechnung von ∇f im Vorwärtsmode des Automatischen Differenzierens.

d) Wie lautet damit der Gradient in Abhängigkeit der Eingangsvariablen?

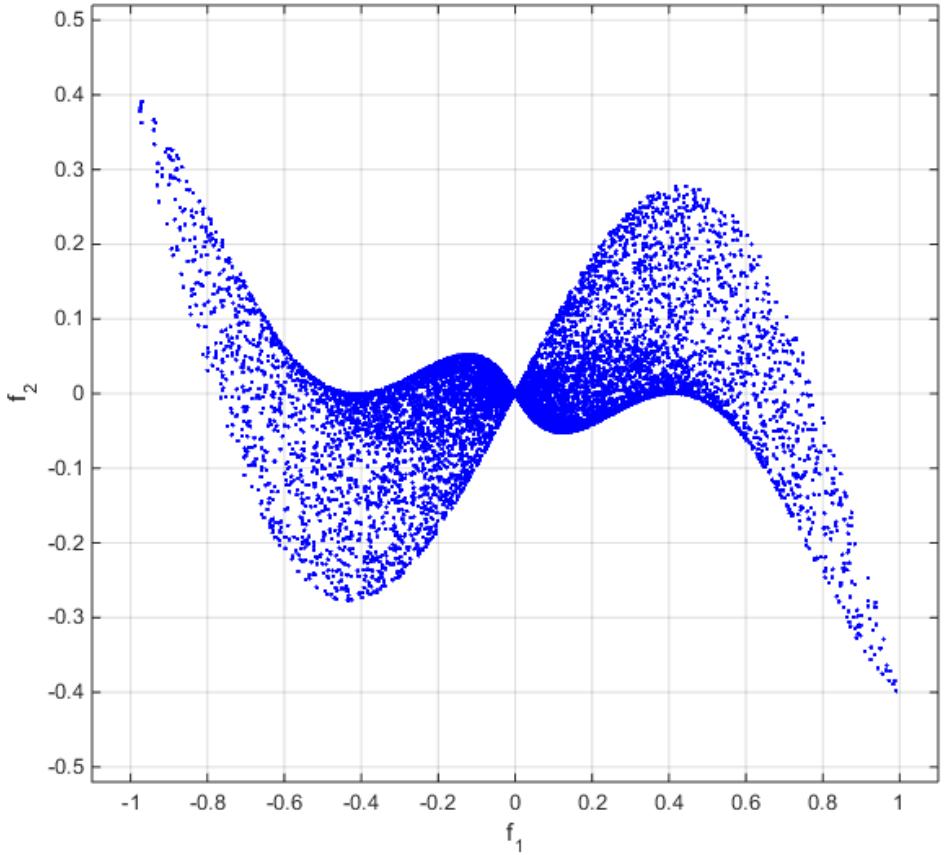
$$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



Aufgabe 6 (14 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt zulässige Entwürfe $\mathbf{f}(\mathbf{p})$ im Kriterienraum des bi-kriteriellen Optimierungsproblems

$$\min_{\mathbf{p}\in[-1,1]^2} \mathbf{f}(\mathbf{p}) = \min_{\mathbf{p}\in[-1,1]^2} \begin{bmatrix} -p_1 p_2 \\ p_1 p_2 \cos(2p_1)\cos(3p_2) \end{bmatrix}.$$



a) Zeichnen Sie die Pareto-Front $\mathcal{F}^P$ ein und bezeichnen Sie diese.

b) Welche individuellen Minima $\mathbf{f}^1$ und $\mathbf{f}^2$ sowie die utopische Lösung $\mathbf{f}^0$ findet man in der Abbildung:

$$\mathbf{f}^1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}^2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{f}^0 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Warum sollte man die individuellen Minima nicht als Lösung des Mehrkriterienoptimierungsproblems empfehlen?

_____

d) Welche Schlussfolgerung kann man aus der Tatsache ziehen, dass die utopische Lösung keine realisierbare Lösung ist?

_____

e) Das Mehrkriterienoptimierungsproblem lässt sich z.B. mit der Methode der gewichteten Kriterien lösen. Wie lautet die Ersatzfunktion im vorliegenden Fall bei gleichstarker Gewichtung beider Kriterien?

$u(p_1, p_2) =$ _____

f) Zeichnen Sie Höhenlinien $u(p_1, p_2) = const.$ der Ersatzfunktion in obiges Bild ein und finden Sie das sich daraus ergebende Optimum:

$$\mathbf{f}^* = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

g) Nennen Sie zwei wesentliche Nachteile der Methode der gewichteten Kriterien.

_____

_____

h) Umkreisen Sie in obigem Bild die Teile der Pareto-Front, die mit der Methode der gewichteten Kriterien unabhängig von der Wahl der Gewichtungskoeffizienten **nicht gefunden** werden können.

E N D E