Prüfung
Optimierung dynamischer System

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 5 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

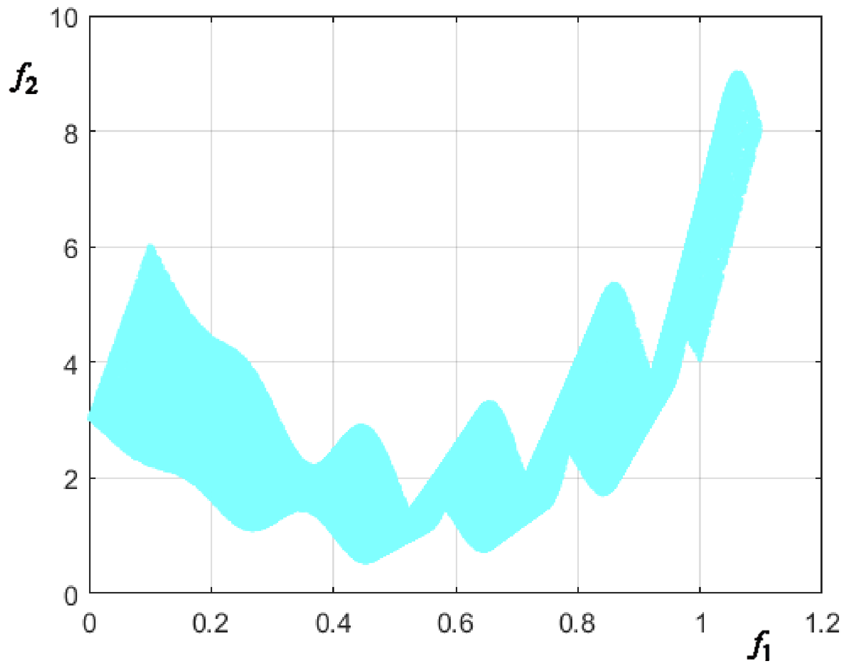
Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Die Abbildung zeigt zulässige Entwürfe $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$ im Kriterienraum eines bi-kriteriellen Optimierungsproblems.

$$\min_{\boldsymbol{p}\in[0,1]^2}\begin{bmatrix} p_1+0.1p_2 \\ \left(1+10\left(p_1-0.45\right)^2-p_1\sin(10\pi\, p_1)\right)\left(1+p_2\right)\end{bmatrix}.$$



a) Zeichnen Sie die Pareto-Front $\mathcal{F}^P$ ein.

b) Zeichnen Sie die individuellen Minima $\boldsymbol{f}^1$ und $\boldsymbol{f}^2$ ein.

c) Mithilfe der Kniesuche kann man das bi-kriterielle Problem skalarisieren. Konstruieren sie die konvexe Hülle der individuellen Minima und die daraus resultierende Kompromisslösung $\boldsymbol{f}^*$.

d) Nennen sie zwei weitere Verfahren zur Skalarisierung von mehrkriteriellen Optimierungsproblemen.

__________________, __________________

Aufgabe 2 (17 Punkte)

Eine zu minimierende Gütefunktion lautet

$$f = p_1 p_2 + p_2^2 \ .$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion.

$$\nabla \boldsymbol{f} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

b) Welcher Gradient und welche Suchrichtung ergeben sich am Punkt $\boldsymbol{p}^{(0)} = [4 \quad 0]^T$ für den ersten Schritt des Quasi-Newton-Verfahrens?

$$\nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}^{(0)}) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{s}^{(0)} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Führen Sie ausgehend von $\boldsymbol{p}^{(0)}$ eine Liniensuche entlang $\boldsymbol{s}^{(0)}$ durch.

$$\boldsymbol{p}(\alpha) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix},$$

$\bar{f}(\alpha) =$ ______________ , $\bar{f}'(\alpha) =$ ________

Notwendige Bedingung 1. Ordnung: ________________

Minimierer: $\alpha^* =$ _____

d) Berechnen Sie das Ergebnis $\boldsymbol{p}^{(1)}$ der Liniensuche und den zugehörigen Gradienten.

$$\boldsymbol{p}^{(1)} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \nabla \boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}^{(1)}) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

e) Welche Punktänderung $\delta\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^{(1)} - \boldsymbol{p}^{(0)}$ und Gradientenänderung $\boldsymbol{\gamma}$ ergeben sich daraus für das Quasi-Newton-Verfahren?

☐ $\delta\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ ☐ $\delta\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\delta\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ ☐ $\delta\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

☐ $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$

f) Berechnen Sie folgende Terme:

$$\frac{\delta\boldsymbol{p}\,\delta\boldsymbol{p}^T}{\delta\boldsymbol{p}^T\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \frac{\boldsymbol{H}^{(0)}\boldsymbol{\gamma}\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{H}^{(0)}}{\boldsymbol{\gamma}^T\boldsymbol{H}^{(0)}\boldsymbol{\gamma}} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

g) Welche Ersatzmatrix $\boldsymbol{H}^{(1)}$ folgt daraus für den nächsten Suchschritt?

$$\boldsymbol{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

h) Geben Sie die Suchrichtung $\boldsymbol{s}^{(1)}$ des nächsten Iterationschritts des Quasi-Newton-Verfahrens an.

☐ $\boldsymbol{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 4/5 \\ 8/5 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 5/8 \\ 4/5 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} -8/4 \\ 1/2 \end{bmatrix}$ ☐ $\boldsymbol{s}^{(1)} = \begin{bmatrix} 8/5 \\ -4/5 \end{bmatrix}$

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Das Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P}\left[(p_1+2p_2-7)^2+(2p_1+p_2-5)^2\right]$$

$$mit\ \ P=\left\{\begin{bmatrix}p_1\\p_2\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,\boldsymbol{h}(\boldsymbol{p})=\begin{bmatrix}-p_1-p_2+5\\-3p_1+p_2+3\end{bmatrix}\le\boldsymbol{0}\right\}$$

soll mit Hilfe der Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen gelöst werden.

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems?

$L =$ ____

____

b) Wie lauten die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für obiges Problem?

___ = ____ $= 0$

___ = ____ $= 0$

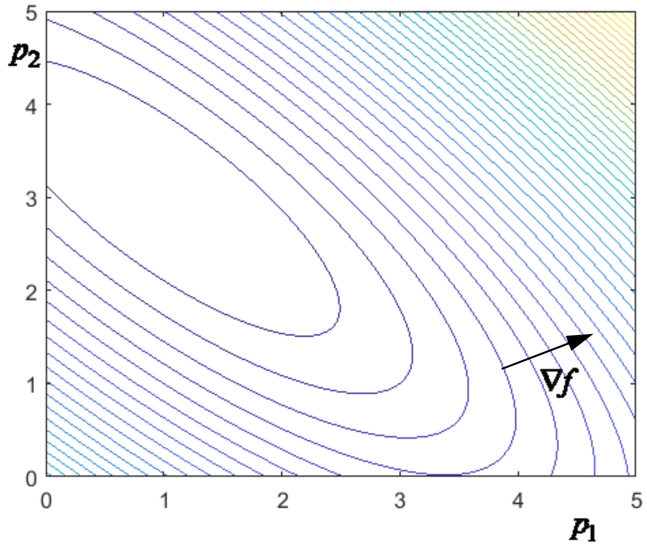
___ = ________________ $\ge 0,\qquad \mu_1 h_1 = 0,\qquad \mu_1 \le 0$

___ = ________________ $\ge 0,\qquad \mu_2 h_2 = 0,\qquad \mu_2 \le 0$

c) Wie viele Fälle sind zu untersuchen?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

d) Zeichnen Sie die Nebenbedingungen in das nebenstehende Bild ein.



e) Zeichnen Sie die Lösung $\boldsymbol{p}^*$ des restringierten Optimierungsproblems ein und geben Sie deren Koordinaten an.

$$\boldsymbol{p}^* = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

f) Klassifizieren sie den Status der Nebenbedingungen im Minimierer $\boldsymbol{p}^*$.

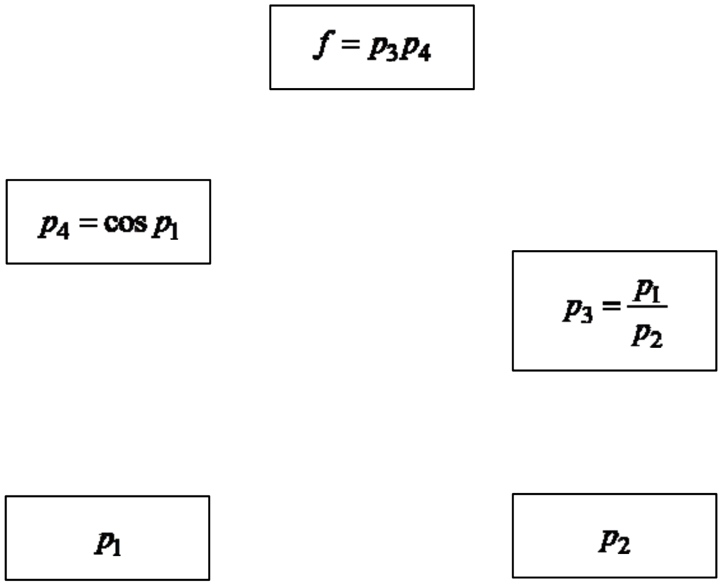
NB	h_1	h_2
verletzt	☐	☐
aktiv	☐	☐
inaktiv	☐	☐

Welches Gleichungssystem entsteht für die Lagrange-Multiplikatoren am Minimierer $\boldsymbol{p}^*$? Welche Werte ergeben sich daraus?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\boldsymbol{\mu}^* = \begin{bmatrix}-10\\-8\end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \boldsymbol{\mu}^* = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Folgender Graph zeigt den Aufbau einer Funktion $f(p_1, p_2)$ aus Elementarfunktionen:



a) Ergänzen Sie die Kanten des Funktionsgraphen.

b) Welche Funktion wird damit berechnet?

$f(p_1, p_2) =$ ____________________

c) Schreiben Sie jeweils die entsprechenden partiellen Ableitungen der Elementarfunktionen an die Kanten des Funktionsgraphen.

d) Erstellen Sie einen Graphen zur Berechnung von ∇f im Rückwärtsmode des Automatischen Differenzierens.

Initialisierung :

Graph :

e) Aus welchen adjungierten Variablen setzt sich der Gradient zusammen?

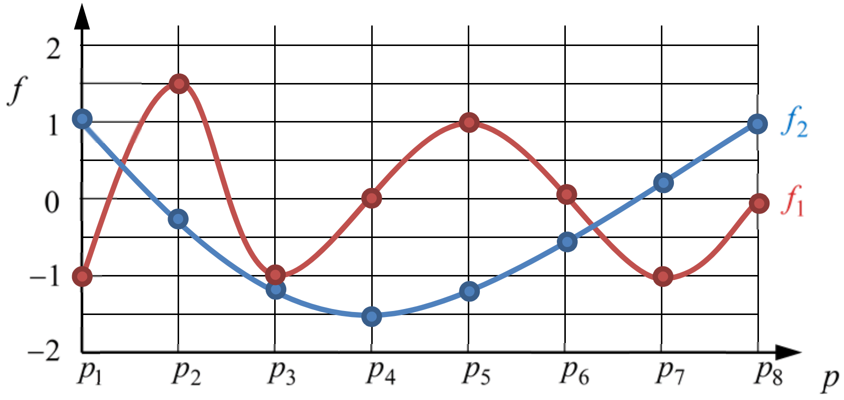
$$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

f) Wie lautet damit der Gradient in Abhängigkeit der Eingangsvariablen?

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Es sollen optimale Entwürfe ermittelt werden, welche $f_1(p)$ und $f_2(p)$ minimieren. Diese Funktionen wurden dazu an den Stellen $p_1 \dots p_8$ ausgewertet.



a) Führen Sie eine Wettkampfselektion durch, bei der zunächst nur die Funktionswerte der Funktion f_1 bewertet werden.

Wettkampf	unentschieden	bzw. Gewinner
$p_3 \leftrightarrow p_7$	☐	_ _ _ _ _ _
$p_4 \leftrightarrow p_5$	☐	_ _ _ _ _ _

b) Führen Sie eine Wettkampfselektion durch, bei der jeweils der im Sinne des Vektorkriteriums $f = [f_1, f_2]$ dominierende Entwurf gewinnt.

Wettkampf	unentschieden	bzw. Gewinner
$p_3 \leftrightarrow p_6$	☐	_ _ _ _ _ _
$p_1 \leftrightarrow p_5$	☐	_ _ _ _ _ _

c) Markieren Sie zunächst die Abschnitte, welche lokal Pareto-optimal sind.

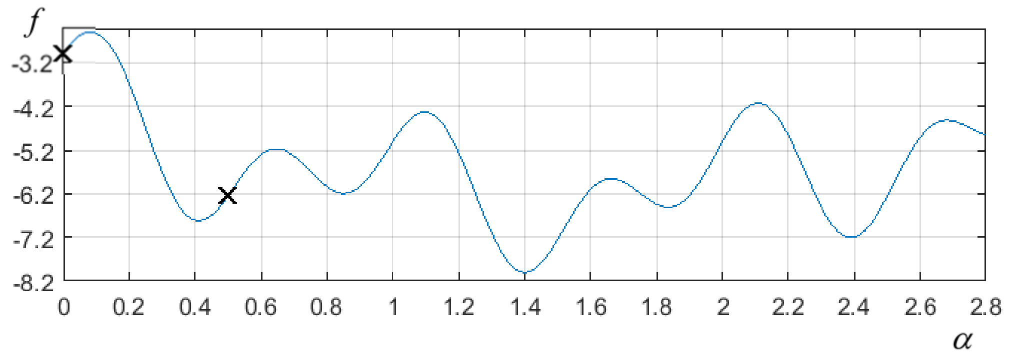
$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8 \quad p$

d) Welcher Abschnitt ist im dargestellten Bereich global Pareto-optimal?

$p_1 \quad p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad p_7 \quad p_8 \quad p$

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Auf die abgebildete Funktion $f(\alpha)$ soll die Liniensuche nach dem Minimierer mit dem Goldenen Schnitt Algorithmus angewandt werden.



a) Suchen Sie zunächst ein Einschließungsintervall für den Minimierer α^* ausgehend von der Anfangsschrittweite $\alpha = 0.5$. Welches erste sichere Einschließungsintervall erhält man am Ende der Suche? Setzen Sie die Funktionswerte f_i jeweils in Relation zum Funktionswert der vorangegangenen Funktionsauswertung f_{i-1}.

α_i	0	0.5		
Relation	f_1	$f_2 < f_1$		

$\rightarrow \alpha^* \in [\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_]$

b) Führen Sie ausgehend vom gefundenen Einschließungsintervall zwei Intervallteilungsschritte nach den Goldenen Schnitt Regeln aus und geben Sie das Ergebnisintervall an, in dem der Minimierer α^* sicher liegt.

Iteration	Einschließungsintervall		Zwischenpunkte	
	α_{LINKS}	α_{RECHTS}	α_{links}	α_{rechts}
0				
1				

$\rightarrow \alpha^* \in [\_\_\_\_\_, \_\_\_\_\_]$

ENDE