Techn. Mechanik & Fahrzeugdynamik — Optimierung

Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle — 12. September 2016

Prüfung
Optimierung dynamischer Systeme

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

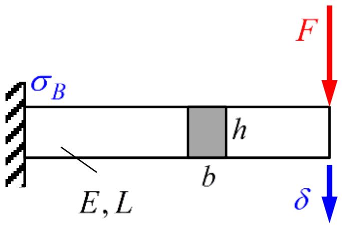
1. Die Prüfung umfasst 8 Aufgaben auf 5 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 74
zum Bestehen erforderlich: 37

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (11 Punkte)



Ein Kragbalken (Länge L, Elastizitätsmodul E) mit Rechteckquerschnitt (Breite b, Höhe h) wird durch eine Kraft F belastet. Dadurch tritt an der Einspannstelle die Biegespannung $\sigma_B = 6FL/(bh^2)$ und am freien Ende die Durchbiegung $\delta = 4FL^3/(Ebh^3)$ auf. Die Querschnittsabmessungen sind im Bereich $b_0 \le b \le b_1$, $h_0 \le h \le h_1$ so festzulegen, dass die Querschnittsfläche $A = bh$ und die Biegespannung σ_B minimal werden, wobei die Durchbiegung δ einen vorgegebenen Wert δ_1 nicht überschreiten darf. Um seitliches Ausknicken zu vermeiden, soll das Höhen-Breiten Verhältnis h/b kleiner gleich 8 bleiben.

a) Formulieren Sie ein geeignetes Optimierungsproblem (zunächst Verwendung aller im Text deklarierten Variablen erlaubt).

Entwurfsvariablen: __________

Entwurfsziele: __________

____

Nebenbedingungen: __________ , __________

__________ , __________

__________ , __________

b) Wie lautet dieses Optimierungsproblem in Standardform? (Setzen Sie jetzt alle Berechnungsformeln explizit ein)

____

____

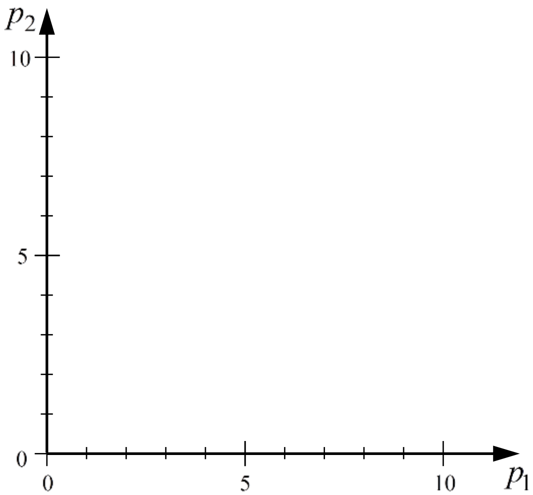
Aufgabe 2 (15 Punkte)

Normiert man in Aufgabe 1 die Entwurfsvariablen bezüglich ihrer unteren Grenzen und bezieht die Kriterien auf ihre Werte für den Querschnitt $b_0 \times h_0$, entsteht unter Verwendung geeigneter Zahlenwerte das dimensionslose Optimerungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P} \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{p}) \\ f_2(\boldsymbol{p}) \end{bmatrix} \quad mit \quad f_1 = p_1 p_2, \qquad f_2 = \frac{1}{p_1 p_2^2}$$

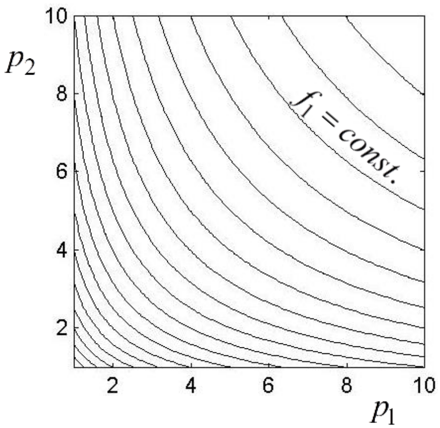
$$P = \left\{ \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{bmatrix} p_2 - 2p_1 \\ 216 - p_1 p_2^3 \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{0}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \leq \boldsymbol{p} \leq \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Zeichnen Sie im Entwurfsraum die Nebenbedingungen ein und machen Sie den zulässigen Entwurfsraum P kenntlich.

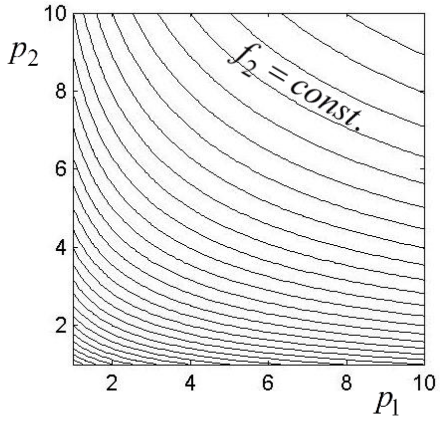


b) Nebenstehendes Bild zeigt die Höhenlinien des Kriteriums $f_1(\boldsymbol{p})$. Berechnen Sie den Gradient und zeichnen Sie ihn an der Stelle $\boldsymbol{p}_0 = [1 \;\; 1]^T$ maßstäblich ein.

$$\nabla f_1(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \nabla f_1(\boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



c) Nebenstehendes Bild zeigt die Höhenlinien des Kriteriums $f_2(\boldsymbol{p})$. Berechnen Sie den Gradient und zeichnen Sie ihn an der Stelle $\boldsymbol{p}_0 = [1 \;\; 1]^T$ maßstäblich ein.



$$\nabla f_2(\boldsymbol{p}) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad \nabla f_2(\boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Um das Mehrkriterienproblem in Aufgabe 2 zu lösen, kann man den zulässigen Entwurfsraum aus Aufgabe 2a in den Kriterienraum abbilden.

a) Welche Beziehungen lassen sich aus den Kriterien $f_1 = p_1 p_2$ und $f_2 = 1/(p_1 p_2^2)$ gewinnen?

☐ $p_1 = f_1^2$ ☐ $p_1 = f_1^2 f_2$ ☐ $p_2 = \dfrac{1}{f_1 f_2}$ ☐ $p_2 = \dfrac{1}{f_1}$

b) Transformieren Sie mithilfe der Kriterienfunktionen $f_1 = p_1 p_2$ und $f_2 = 1/(p_1 p_2^2)$ folgende Nebenbedingungen in den Kriterienraum, indem Sie Relationen der Form $f_2 \geq \ldots$ bzw $f_2 \leq \ldots$ in Abhängigkeit von f_1 bilden:

$p_1 \geq 1 \quad \rightarrow \quad f_2$ _____ , $\quad p_1 \leq 10 \quad \rightarrow \quad f_2$ _____ ,

$p_2 \geq 1 \quad \rightarrow \quad f_2$ _____ , $\quad p_2 \leq 10 \quad \rightarrow \quad f_2$ _____ ,

$p_2 \leq 2p_1 \quad \rightarrow \quad f_2$ _____ , $\quad p_1 p_2^3 \geq 216 \rightarrow \quad f_2$ _____

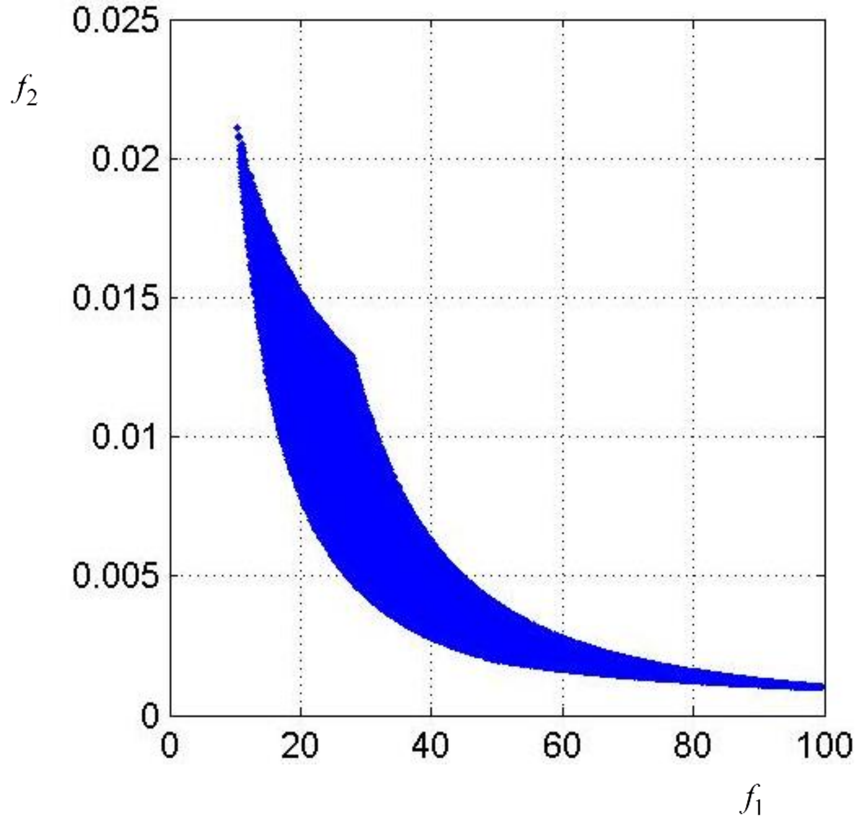
Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Abbildung von zulässigen Entwurfspunkten mit den Kriterienfunktionen in Aufgabe 2 liefert das untenstehende Bild der erreichbaren Punkte im Kriterienraum.

a) Zeichnen Sie die Pareto-Front $\mathcal{F}^P$ ein.

b) Zeichnen Sie die ideale Lösung $\boldsymbol{f}^0$ ein.

c) Mithilfe des Goal Attainment kann man das bi-kriterielle Problem skalarisieren. Konstruieren Sie den Gewichtungsvektor $\boldsymbol{w} = [10 \quad 1/200]^T$ und die damit entstehende optimale Kompromisslösung $\boldsymbol{f}^*$.



Aufgabe 5 (12 Punkte)

Das Mehrkriterienproblem in Aufgabe 2 lässt sich auf ein skalares Problem reduzieren, indem man für das Flächenkriterium $f_1(\boldsymbol{p})$ einen festen Wert a vorgibt und nur das Spannungskriterium $f_2(\boldsymbol{p})$ minimiert. Unter der Annahme, dass die Parametergrenzen inaktiv sind, ergibt sich das reduzierte Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{p} \in P} \frac{1}{p_1 p_2^2}$$

$$mit \;\; P = \left\{ \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(\boldsymbol{p}) := p_1 p_2 - a = 0, \; \boldsymbol{h}(\boldsymbol{p}) := \begin{bmatrix} p_2 - 2p_1 \\ 216 - p_1 p_2^3 \end{bmatrix} \le \boldsymbol{0} \right\},$$

für das die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen formuliert werden sollen.

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems?

$L =$ ____

b) Wie lauten die zugehörigen Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen?

___ = ______________________________

___ = ______________________________

___ = _____________ ,

___ = _____________ , _________ , _________

___ = _____________ , _________ , _________

c) Wie viele Fälle sind zu untersuchen?

☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Der Gradient des Kriteriums

$$f_2(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{p_1 p_2^2}$$

aus Aufgabe 2 soll durch Automatisches Differenzieren ermittelt werden.

a) Erstellen Sie einen Funktionsgraphen für $f_2(\boldsymbol{p})$ unter Verwendung von einzelnen elementaren Rechenoperationen.

b) Ergänzen Sie den Funktionsgraphen an den Kanten um die entsprechenden partiellen Ableitungen der Elementarfunktionen.

$f_2 =$

p_1 p_2

c) Ergänzen Sie den Graphen zur Gradientenberechnung von ∇f_2 im Vorwärtsmode des Automatischen Differenzierens um Kanten und Zwischenergebnisse.

$\nabla f_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

$\nabla p_1 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$ $\nabla p_2 = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

d) Erstellen Sie einen vollständigen Graphen zur Berechnung von ∇f_2 im Rückwärtsmode des Automatischen Differenzierens.

Initialisierung:

Graph:

e) Aus welchen adjungierten Variablen setzt sich der Gradient zusammen?

$\nabla f = \begin{bmatrix} \quad \end{bmatrix}$

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Nimmt man in Aufgabe 5 an, dass die zweite Ungleichung inaktiv ist, kann man das restringierte Optimierungsproblem ersatzweise durch Minimieren der Gütefunktion

$$\Phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{p_1 p_2^2} + r_1 (p_1 p_2 - a)^2 + r_2 \left(\max\{0, p_2 - 2p_1\}\right)^2, \quad r_1, r_2 \in \mathbb{R}$$

lösen.

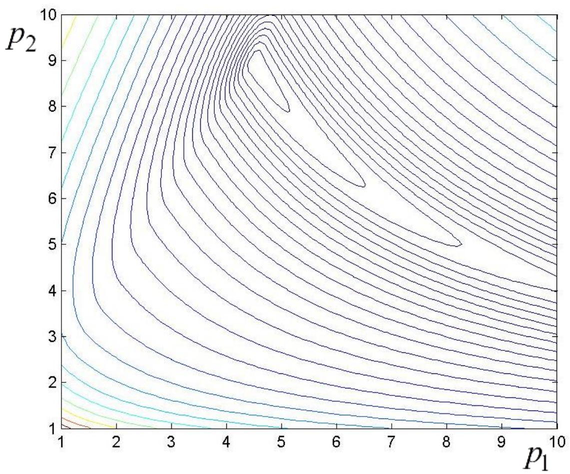
a) Wie nennt man diese Strategie?

☐ Skalarisierung ☐ SUMT ☐ PSO ☐ SQP

b) Bestimmen Sie den Wert der obigen Gütefunktion an den Entwurfspunkten $\boldsymbol{p}_1 = [1 \;\; 1]^T$ und $\boldsymbol{p}_2 = [5 \;\; 5]^T$ für $a = 40$, $r_1 = 10^{-4}$, $r_2 = 10^{-2}$.

$\Phi(\boldsymbol{p}_1) =$ _________ , $\Phi(\boldsymbol{p}_2) =$ _________

c) Nebenstehendes Bild zeigt die Höhenlinien von $\Phi(\boldsymbol{p})$ für dieselben Parameterwerte. Zeichnen Sie das Optimum $\boldsymbol{p}^*$ ein.



d) Wie würde $\Phi(\boldsymbol{p})$ lauten, wenn man die Ungleichungsnebenbedingung durch eine Barrierefunktion berücksichtigen würde?

$$\Phi(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{p_1 p_2^2} + r_1 (p_1 p_2 - a)^2 + r_2 \,\_\_\_\_\_\_\_$$

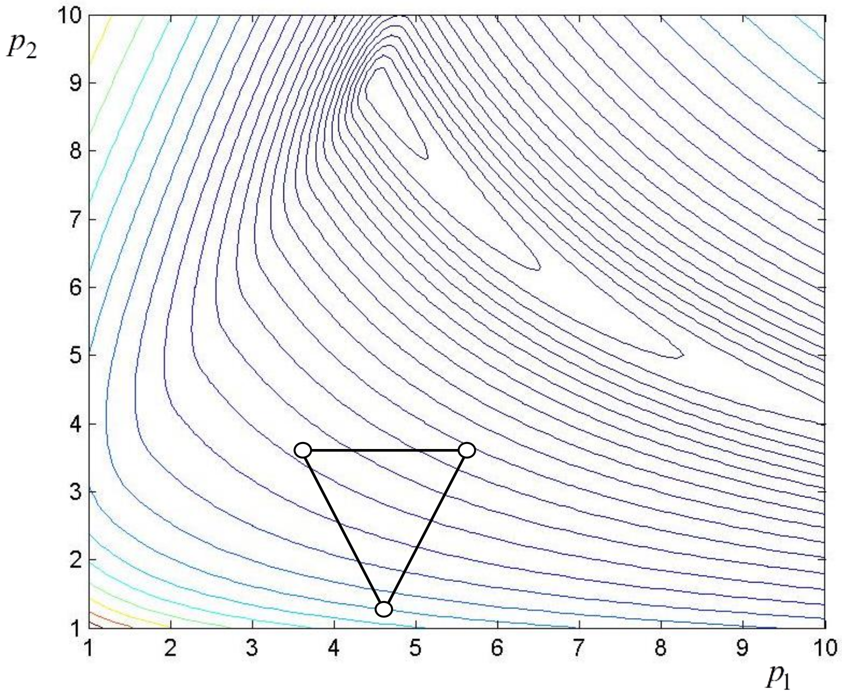
Aufgabe 8 (3 Punkte)

Untenstehendes Bild zeigt die Höhenlinien der zu minimierenden Funktion aus Aufgabe 7.

a) Bezeichnen Sie die Eckpunkte des dargestellten Startsimplex in aufsteigender Reihenfolge des Gütefunktionswertes mit

$$f_0 \leq f_1 \leq f_2 .$$

b) Führen Sie zur Minimierung der Funktion ausgehend vom Startsimplex graphisch einen vollständigen Iterationsschritt des Simplex-Agorithmus von Nelder und Mead mit den Standardeinstellungen $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$, $\gamma = 2$ durch.



ENDE