Prüfung
Optimierung dynamischer Systeme

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 5 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner; Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

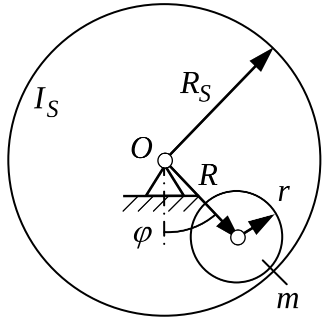
....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 74
zum Bestehen erforderlich: 37

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (11 Punkte)

Aus einer im Mittelpunkt gelagerten Kreisscheibe (Trägheitsmoment I_S und Radius R_S gegeben) soll durch Anbringen einer zylindrischen Zusatzmasse (Dichte $\rho = 7800\,\mathrm{kg/m^3}$, Radius r, Höhe h, Abstand R vom Mittelpunkt) ein Pendel entstehen. Aus dem Drallsatz



$$I_O\,\ddot{\varphi} = -mgR\sin\varphi$$

ergibt sich für kleine Ausschläge $|\varphi| \ll 1$ die Pendelfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{mgR}{I_O}} \quad mit \quad I_O = I_S + \frac{1}{2}mr^2 + mR^2$$
$$m = \rho\pi r^2 h$$

Das Ziel ist, mit möglichst geringer Zusatzmasse m eine möglichst hohe Pendelfrequenz ω zu erreichen, wobei die Zusatzmasse nicht über die Kreisscheibe hinaus ragen darf und die Höhe aus ästhetischen Gründen auf $h \le R_S$ begrenzt ist.

a) Formulieren Sie ein geeignetes Optimierungsproblem zur Festlegung der Zusatzmasse (Hinweis: alle nötigen Berechnungsformeln sind als Nebenbedingungen anzugeben, müssen aber nicht ineinander eingesetzt werden).

Entwurfsvariablen: __________

Entwurfsziele: __________

____

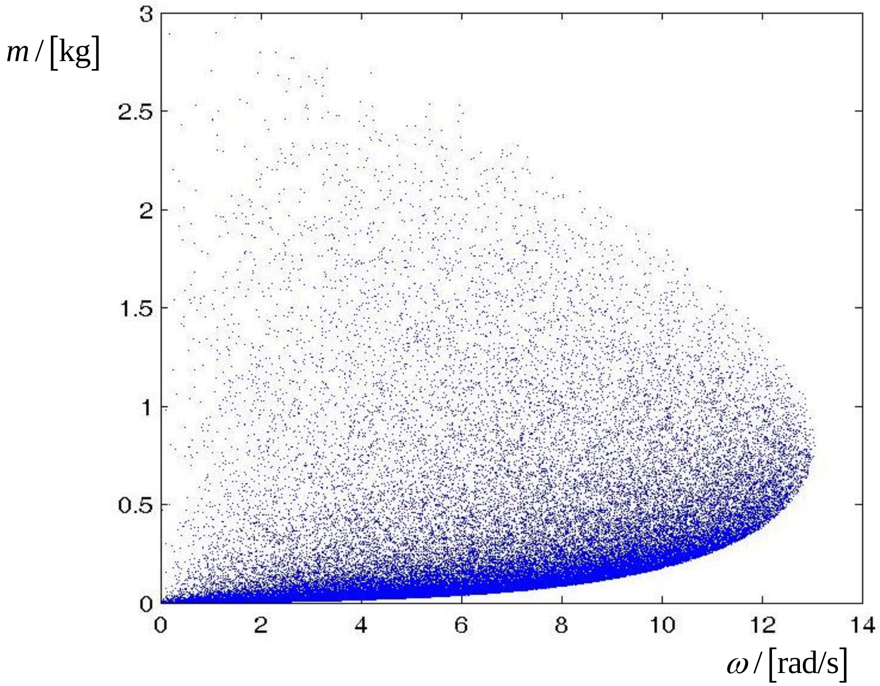
Nebenbedingungen: __________, __________

__________, __________

__________, __________

__________, __________

b) Die Abbildung zeigt die Zusatzmasse m und die Pendelfrequenz ω für 10^6 zufällig gewählte, aber zulässige Abmaße der Zusatzmasse, wobei $I_S = 3.8 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg\,m^2}$, $R_S = 0.05\mathrm{m}$. Markieren Sie alle optimalen Lösungen.



c) Welche Lösung ergibt sich mit der Kompromissmethode, wenn die Zusatzmasse auf $m \le 500\,\mathrm{g}$ beschränkt wird? Machen Sie die Vorgehensweise und die Lösung graphisch sichtbar.

$\omega_{opt} =$ _____

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Eine Gütefunktion ist gegeben durch

$$f(\boldsymbol{p}) = p_1^2 - 2p_1p_2 + p_3^2 .$$

a) Bestimmen Sie den Gradienten und die Hessematrix.

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

b) Wie groß ist der Gradient an der Stelle $\boldsymbol{p}_0 = [1 \;\; 0 \;\; 1]^T$?

$$\nabla f(\boldsymbol{p}_0) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

c) Bestimmen Sie die Richtungsableitung der Funktion $f(\boldsymbol{p}(\alpha)) =: \bar{f}(\alpha)$ auf der Linie $\boldsymbol{p}(\alpha) = \boldsymbol{p}_0 + \alpha \boldsymbol{s}$ mit $\boldsymbol{s} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ an der Stelle $\alpha = 0$.

$\bar{f}'(0) =$ _____

d) Führen Sie ausgehend von $\boldsymbol{p}_0 = [1 \;\; 0 \;\; 1]^T$ eine Liniensuche entlang $\boldsymbol{s} = [0 \;\; 2 \;\; 1]^T$ nach dem Minimum durch.

$$\boldsymbol{p}(\alpha) = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix},$$

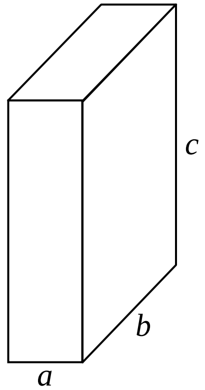
$\bar{f}(\alpha) =$ ______________, $\quad \bar{f}'(\alpha) =$ ________

Notwendige Bedingung 1. Ordnung: ________________

Minimierer: $\alpha^* =$ _____

Aufgabe 3 (16 Punkte)

Ein bekannter Paketversandservice beschränkt die Paketgröße dadurch, dass kürzeste plus längste Paketseite ein vorgegebenes Maß $L = 0.5\mathrm{m}$ nicht überschreiten dürfen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei die kürzeste Seite mit a, die mittlere mit b und die längste mit c bezeichnet. Da das Paketvolumen $V = abc$ eine monoton steigende Funktion in allen drei Entwurfsvariablen ist, kann man zur Bestimmung des Maximalvolumens davon ausgehen, dass die Längenbeschränkung $a + c \le L$ vollständig ausgenutzt wird. Aus der dann aktiven Nebenbedingung $a + c = L$ kann z.B. die Entwurfsvariable $c = 1/2 - a$ eliminiert werden und man erhält das Optimierungsproblem



$$\min_{\boldsymbol{p} \in P} \left(-ab\left(\frac{1}{2} - a\right) \right) \quad mit \ P = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \middle| \begin{bmatrix} -a \\ a - b \\ a + b - 1/2 \end{bmatrix} \le \boldsymbol{0} \right\},$$

für das die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen formuliert werden sollen.

a) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Optimierungsproblems?

$L =$ ____

b) Wie lauten die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen für obiges Problem?

___ = ______________________________

___ = ______________________________

___ = _____________, _________, _________

___ = _____________, _________, _________

___ = _____________, _________, _________

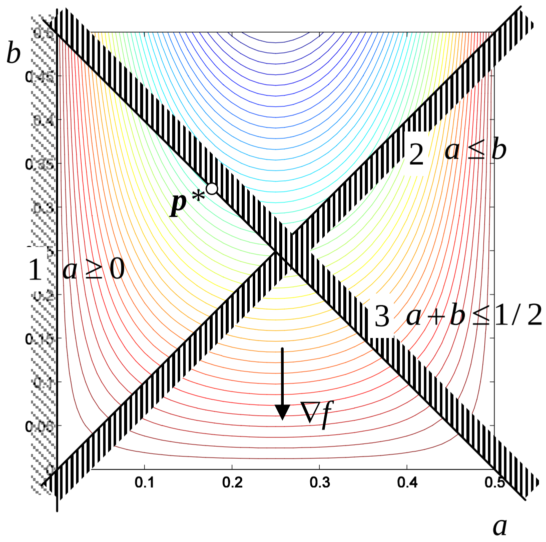
c) Wie viele Fälle sind zu untersuchen?

☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 16 ☐ 32

d) Nebenstehendes Bild zeigt die graphische Lösung mit dem Minimierer $\boldsymbol{p}^*$.

Klassifizieren Sie den Status der Nebenbedingungen im Minimierer $\boldsymbol{p}^*$.

NB	1	2	3
verletzt	☐	☐	☐
aktiv	☐	☐	☐
inaktiv	☐	☐	☐



e) Im Minimierer $\boldsymbol{p}^*$ gilt offensichtlich $b = 1/2 - a$. Reduzieren Sie die Karush-Kuhn-Tucker Bedingungen auf diesen Fall, berücksichtigen Sie dabei auch die Kenntnis einiger Lagrange-Multiplikatoren.

$\frac{\partial L}{\partial a}$ = ______________________________

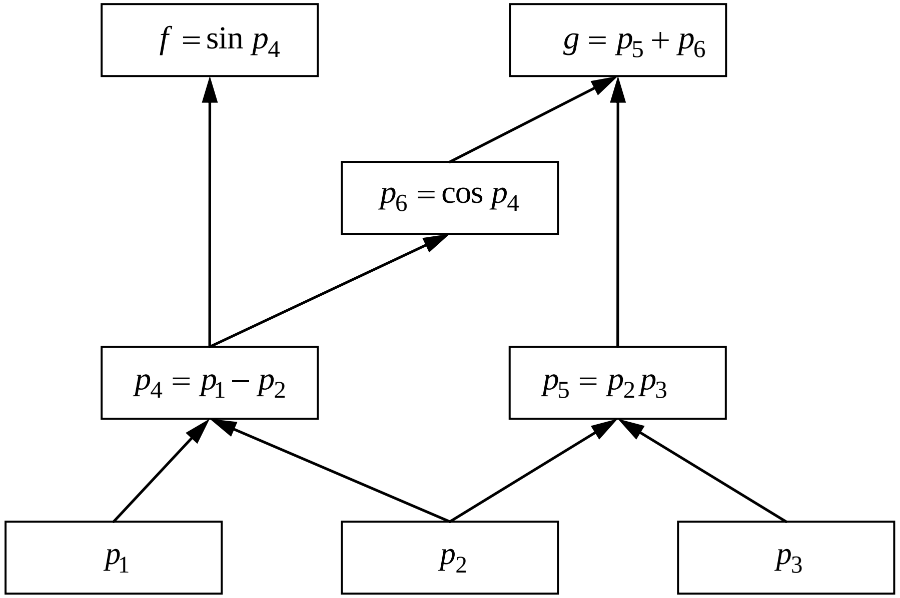
$\frac{\partial L}{\partial b}$ = ______________________________

f) Welche optimale Lösung ergibt sich daraus unter Berücksichtigung aller Nebenbedingungen entsprechend obigem Bild in Aufgabenteil d?

$a_{opt} =$ _____, $\mu_3 =$ _____

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Folgender Graph zeigt den Aufbau zweier Funktionen $f(\boldsymbol{p})$ und $g(\boldsymbol{p})$ aus Elementarfunktionen:



a) Welche Funktionen werden durch den Funktionsgraphen repräsentiert?

$f(p_1, p_2, p_3) =$ ____________________

$g(p_1, p_2, p_3) =$ ____________________

b) Schreiben Sie jeweils die entsprechenden partiellen Ableitungen der Elementarfunktionen an die Kanten des obigen Funktionsgraphen.

c) Erstellen Sie einen vollständigen Graphen zur Berechnung von ∇f und ∇g im Vorwärtsmode des Automatischen Differenzierens.

d) Erstellen Sie jeweils vollständige Graphen zur Berechnung von ∇f und ∇g im Rückwärtsmode des Automatischen Differenzierens.

Initialisierung:

Graphen:

e) Aus welchen adjungierten Variablen setzen sich die Gradienten zusammen?

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

f) Wie lauten damit die Gradienten in Abhängigkeit der Eingangsvariablen?

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}, \quad \nabla g = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Ein restringiertes Optimierungsproblem

$$\min_{\boldsymbol{p}\in P}\left((p_1-1)^2+p_2^2\right) \quad mit \;\; P=\left\{\boldsymbol{p}\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, p_1\le 1,\, p_2=p_1^2\right\}$$

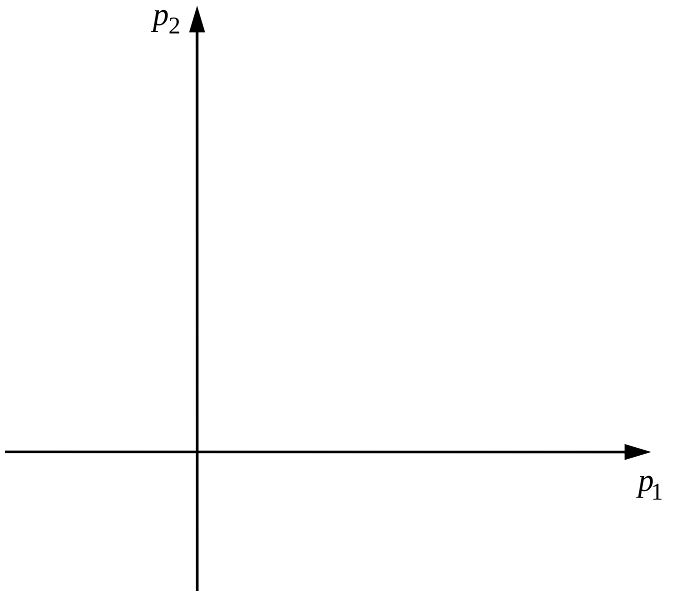
soll mithilfe von SUMT gelöst werden.

a) Wie lautet das Optimierungsproblem in Standardform?

____

____

b) Skizzieren Sie die Höhenlinien der Gütefunktion und die Nebenbedingungen im Entwurfsraum.



c) Bestimmen Sie graphisch die Lösung $\boldsymbol{p}^*$ des Optimierungsproblems.

d) Welche Reduktionsstrategie ist auf dieses Problem anwendbar?

☐ Penalty-Verfahren ☐ Barriere-Verfahren

Begründung : ______________________________________

e) Formulieren Sie die entsprechende Ersatzfunktion des unrestringierten Optimierungsproblems.

$\Phi =$ ______________________________________

ENDE