15 Eindimensionale Strömungen

Durch Druckunterschiede entstehen Strömungen, die sich auf unterschiedliche Weise beschreiben lassen. Bei der Lagrange'schen oder materiellen Beschreibung betrachtet man das einzelne Fluidteilchen, das auch als materieller Punkt bezeichnet wird, und verfolgt dessen Bahn. Zur Charakterisierung des materiellen Punktes wählt man seine Lage $\boldsymbol{X}$ für einen definierten Anfangszeitpunkt. Geschwindigkeit und Beschleunigung des materiellen Punktes ergeben sich dann analog zur Kinematik des Massenpunkts durch Ableitung der Bahnkurve nach der Zeit.

Im Unterschied dazu beschreibt man bei der Euler'schen oder räumlichen Betrachtung das gesamte Strömungsfeld, d.h. man beschreibt die Eigenschaften der Strömung in Abhängigkeit eines räumlichen Ortes $\boldsymbol{x}$, der vom Fluid durchströmt wird. Damit entspricht beispielsweise die Strömungsgeschwindigkeit an diesem Ort der Geschwindigkeit des Fluidteilchens, das diesen Ort gerade passiert. Zeitliche Ableitungen des Feldes kennzeichnen jedoch nicht zeitliche Änderungen von Eigenschaften des Fluidteilchens, da dieses inzwischen aufgrund der Strömung seinen Ort verändert hat. Um beispielsweise die Beschleunigung eines Fluidteilchens aus dem Geschwindigkeitsfeld zu gewinnen, muss man neben der zeitlichen Feldänderung einen konvektiven Term berücksichtigen, der die Ortsänderung des Fluidteilchens widerspiegelt.

In vielen technischen Anwendungen genügt eine eindimensionale Betrachtung stationärer Strömungen, die durch zeitinvariante Geschwindigkeitsfelder gekennzeichnet sind. Bahnlinien sind dort gleichzeitig Stromlinien, die sich durch tangentiales Anschmiegen von Kurven an die Geschwindigkeitsvektoren finden lassen. Alle Stromlinien durch eine vorgegebene geschlossene Kurve bilden eine Stromröhre, die zusätzlich durch eine Eintritts- und eine Austrittsfläche in Strömungsrichtung begrenzt werden kann. Solche Abschnitte von Stromröhren eignen sich als Kontrollvolumina für Bilanzen. Bei konstanter Dichte müssen beispielsweise ein- und austretender Massenstrom gleich groß sein, woraus die Kontinuitätsgleichung folgt. Die Differenz von eintretendem und austretendem Impuls entspricht der Kraft auf das Fluid im Kontrollvolumen, die entgegengesetzt gleich große Kraft beinhaltet die dynamische Wirkung auf die Berandung des Kontrollvolumens.

Eine Impulsbetrachtung eines einzelnen materiellen Punktes führt auf die Euler'sche Bewegungsgleichung, welche Veränderungen der Strömung aufgrund von massenspezifischen Volumenkräften und Druckunterschieden beschreibt. Durch Integration über einen Stromlinienabschnitt erhält man daraus die Bernoulli Gleichung, die einen einfachen Zusammenhang zwischen den Geschwindigkeiten und Drücken an verschiedenen Abschnitten einer Strömung herstellt.

15.1 Beschreibung von Strömungen

Vereinfachungen

Ideale Flüssigkeit, d.h.
- reibungsfrei: $\tau = 0$
- inkompressibel: $\varrho = const.$

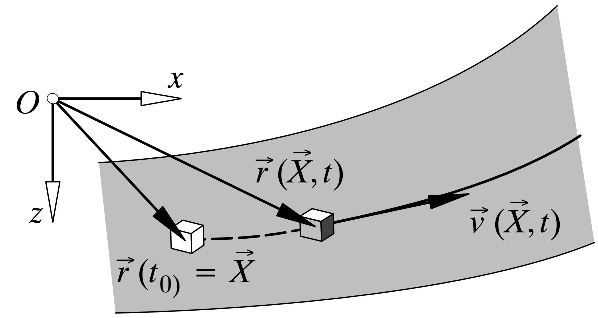
Begriffe

Lagrange'sche (materielle) Beschreibung: Verfolgung eines einzelnen Flüssigkeitsteilchens (materiellen Punkts $\boldsymbol{X} = [x_0 \;\; y_0 \;\; z_0]^T$)

Lage: $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, t)$

Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{X}, t) = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}$

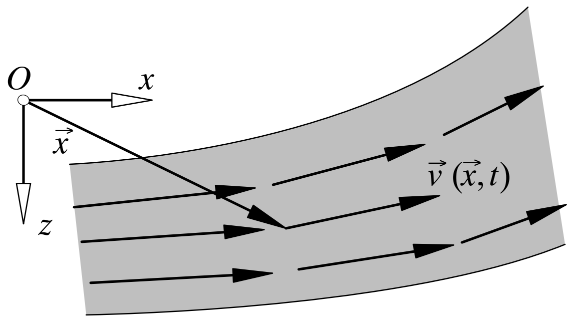
Beschleunigung $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{X}, t) = \dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}$



Bahnlinie: Bahn $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, t)$ eines einzelnen Fluidteilchens $\boldsymbol{X}$

Euler'sche (räumliche) Beschreibung: räumliche Beschreibung von Strömungseigenschaften, z.B.

Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$



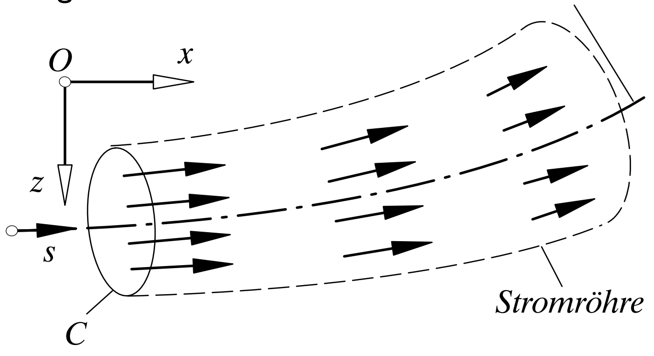
Stromlinie: Kurve mit örtlicher Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, T)$ als Tangentenrichtung bei festgehaltener Zeit T

Zusammenhang:
- bei stationärer Strömung fallen Bahnlinien und Stromlinien zusammen
- ein Flüssigkeitsteilchen $\boldsymbol{X}$ hat am momentanen Ort $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{X}, t)$ die Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$ der Strömung
- Beschleunigung eines Fluidteilchens am Ort $\boldsymbol{x}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}, t) &= \frac{d\boldsymbol{v}\big(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t\big)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\,\dot{\boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial \boldsymbol{x}}\,\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t) + \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)}{\partial t}\end{aligned}$$

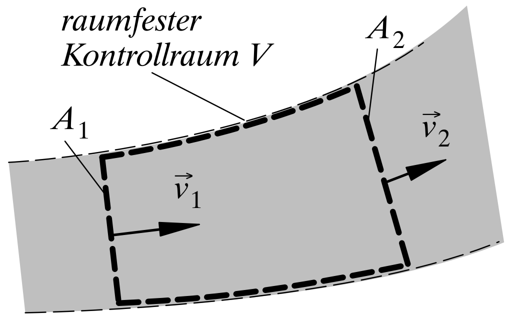
15.2 Strömungsgeschwindigkeit

Betrachtung einer stationären Strömung entlang einer Stromlinie



Kontinuitätsgleichung

Massenerhaltung

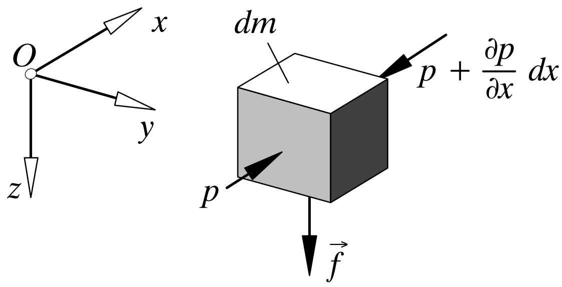


$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = const.$$

$$Q_1 = Q_2 = const.$$

Euler'sche Bewegungsgleichung

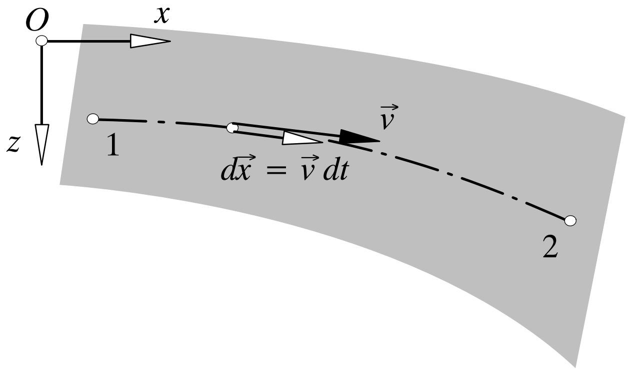
Impulssatz für einen materiellen Punkt



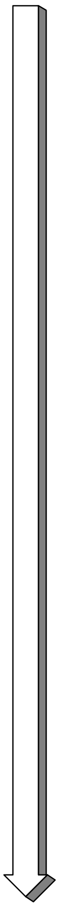
$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\, \boldsymbol{v} = \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\, grad\, p$$

Bernoulli'sche Gleichung

Ann. • stationäre Strömung, $\partial \boldsymbol{v}/\partial t = \boldsymbol{0}$
• inkompressibel, $\varrho = const.$
• Schwerefeld, $\boldsymbol{f} = [0 \;\; 0 \;\; g]^T$



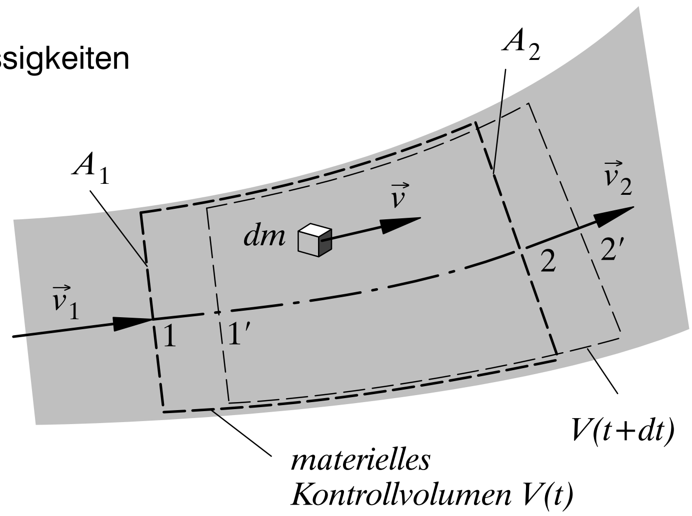
Integration der Euler'schen Gleichung entlang einer Stromlinie



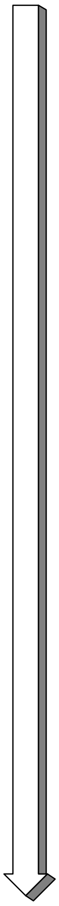
$$\varrho\, \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \varrho\, g\, h_2 = \varrho\, \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \varrho\, g\, h_1 = const.$$

15.3 Strömungskräfte

Dynamische Kräfte von strömenden Flüssigkeiten auf ihre Berandungen



Impulssatz $\dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$



$\boldsymbol{F} = \dot{m}\left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right)$ mit $\dot{m} = \varrho A_1 v_1 \equiv \varrho A_2 v_2$