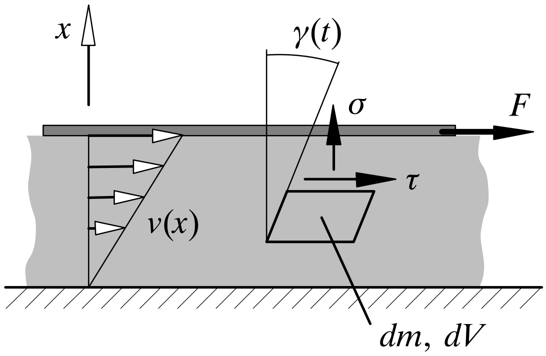
12 Fluidstatik

Als Fluide bezeichnet man Kontinua mit leicht verschieblichen Teilen. Im Unterschied zu festen Körpern setzen sie langsamen Formänderungen ohne Volumenänderung nur geringen Widerstand entgegen. Entsprechend ihrer Konsistenz unterscheidet man tropfbare Fluide (Flüssigkeiten) und nicht tropfbare Fluide (Gase). Flüssigkeiten erfahren selbst unter hohem Druck nur geringe Volumenänderungen, die man in praktischen Anwendungen häufig vernachlässigen kann. Man bezeichnet sie dann als inkompressibel, ihre Dichte ist bei homogenen Flüssigkeiten zeitlich und räumlich konstant. Gase dagegen füllen jeden ihnen zur Verfügung stehenden Raum unter Änderung ihrer Dichte. Für ideale Gase gilt bei isothermen Vorgängen $pV = const.$

Volumenerhaltende Formänderungen ergeben sich beispielsweise bei einem Fluid zwischen zwei Platten, die sich parallel zueinander bewegen. Haftet das Fluid jeweils an den Platten, entsteht eine Scherbelastung, die Winkeländerungen hervorruft. Im Gegensatz zu den linear-elastischen festen Körpern, bei denen der Scherwinkel über den Schubmodul auf Schubspannungen $\tau = G\gamma$ führt, entstehen beim zähen Fluid die Schubspannungen nur durch zeitliche Winkeländerungen. Bei Newton'schen Fluiden ist dieser Zusammenhang linear, d.h. $\tau = \eta\,\dot{\gamma}$, die Proportionalitätskonstante η heißt dynamische Viskosität oder Scherzähigkeit. In der Fluidstatik verschwinden die Schubspannungen wegen $\dot{\gamma} = 0$, bei reibungsfreien Fluiden wegen $\eta = 0$.

Neben Schubspannungen entstehen in Fluiden negative Normalspannungen, deren Betrag man als Druck p bezeichnet. In einem ruhenden Fluid ist der Druck eine richtungsunabhängige skalare Funktion des Ortes, deren Gradient durch Dichte und massenspezifische Volumenkraft bestimmt ist. Bei inkompressiblen Flüssigkeiten auf der Erde ergibt sich der Druck aus der darüber stehenden Flüssigkeitssäule.

12.1 Fluideigenschaften



Definitionen

- leichte Verschieblichkeit der Teilchen
  → Strömungsgeschwindigkeit

  v Einheit: $[\mathrm{m/s}]$

  i. Allg. ortsabhängig, z.B. $v = v(x)$

  laminare Strömung: Abgleiten von Schichten mit unterschiedlicher Geschwindigkeiten ohne Vermischung

  turbulente Strömung: verwirbelte Strömung

- Schergeschwindigkeit

  $\dot{\gamma} = \dfrac{dv}{dx}$ Einheit: $[\mathrm{rad/s}]$

- Spannungen

  Normalspannung: $\sigma = \dfrac{dN}{dA} =: \underbrace{-\,p}_{\text{Druck}} < 0$ Einheit: $1\,[\mathrm{Pa}] = 1\,[\mathrm{N/m^2}]$

  Schubspannung: (Newton'sches Fluid) $\tau = \dfrac{dT}{dA} = \eta\,\dot{\gamma}$ Einheit: $1\,[\mathrm{Pa}] = 1\,[\mathrm{N/m^2}]$

  dynamische Viskosität (Scherzähigkeit)

  $\eta = \dfrac{\tau}{\dot{\gamma}}$ Einheit: $[\mathrm{Ns/m^2}]$

  alternativ: kinematische Viskosität

  $\mu = \dfrac{\eta}{\varrho}$ Einheit: $[\mathrm{m^2/s}]$

  Sonderfälle:

  reibungsfreies Fluid: $\eta = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 0$

  Fluidstatik: $\dot{\gamma} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau = 0$

- Dichte

  $$\varrho = \frac{dm}{dV} \qquad \text{Einheit: } [\mathrm{kg/m^3}]$$

  inkompressibles Fluid: $\varrho = const.$
  (Hydrodynamik)

  kompressibles Fluid: $\varrho = \varrho(p, T)$
  (Gasdynamik, Aerodynamik)

  z.B. Gesetz von Boyle und Mariotte für
  ideale Gase bei isothermen Vorgängen: $p\,V = const.$

- ideale Flüssigkeit: inkompressibel ($\varrho = const.$) und reibungsfrei ($\eta = 0$)

Arbeitshypothesen der Fluidstatik

- Schnittprinzip: Ist ein Fluid im Gleichgewicht, dann ist jeder beliebig herausgeschnittene Teilbereich für sich im Gleichgewicht.

- Erstarrungsprinzip: Das Gleichgewicht bleibt erhalten, wenn Teile des Fluids erstarren.

12.2 Statischer Druck

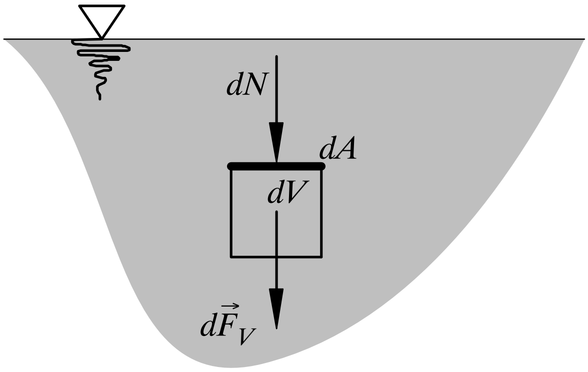
Definitionen

- (massen-)spezifische Volumenkraft

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \to 0} \frac{\Delta \vec{F}_V}{\Delta m} = \frac{d\vec{F}_V}{dm}$$

- statischer Druck

$$p = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta A} = \frac{dN}{dA}$$



Eigenschaft

Der Druck p in einem ruhenden Fluid ist eine skalare Funktion des Ortes und damit richtungsunabhängig. Es gilt

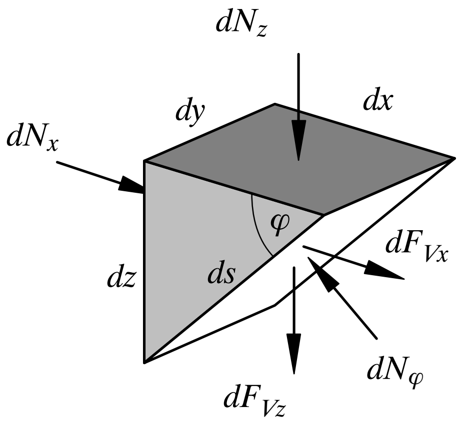
$$grad\ p = \varrho f$$

Einheiten:

$$1\ [\mathrm{Pa}] = 1\ [\mathrm{N/m^2}]$$
$$1\ [\mathrm{bar}] = 10^5\ [\mathrm{Pa}] = 10^5\ [\mathrm{N/m^2}]$$
$$1\ [\mathrm{psi}] = 6895\ [\mathrm{Pa}]$$

- Richtungsunabhängigkeit

Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum F_x = dN_x - dN_\varphi \sin\varphi + dF_{Vx} = 0$$
$$\sum F_z = dN_z - dN_\varphi \cos\varphi + dF_{Vz} = 0$$

$$dV = \frac{1}{2}\, dx\, dy\, dz$$
$$dm = \varrho\, dV$$
$$\sin\varphi = \frac{dz}{ds}\,, \quad \cos\varphi = \frac{dx}{ds}$$

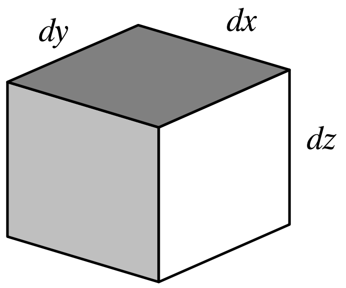
$$p_x\, dy\, dz - p_\varphi\, ds\, dy\, \frac{dz}{ds} + \frac{1}{2}\,\varrho\, f_x\, dx\, dy\, dz = 0$$
$$p_z\, dx\, dy - p_\varphi\, ds\, dy\, \frac{dx}{ds} + \frac{1}{2}\,\varrho\, f_z\, dx\, dy\, dz = 0$$

$$dx,\ dy,\ dz \to 0$$

$$p_x \equiv p_\varphi \equiv p_z$$

- Ortsabhängigkeit $p(x,y,z)$

Gleichgewichtsbedingungen:



$$\sum F_x = p\, dy\, dz + \varrho\, f_x\, dV - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\, dx\right) dy\, dz = 0$$
$$\sum F_y = p\, dx\, dz + \varrho\, f_y\, dV - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y}\, dy\right) dx\, dz = 0$$
$$\sum F_z = p\, dx\, dy + \varrho\, f_z\, dV - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\, dz\right) dx\, dy = 0$$

$$dV = dx\, dy\, dz,$$
$$grad\ \ p(x,y,z) = \nabla p = \begin{bmatrix} \partial p/\partial x \\ \partial p/\partial y \\ \partial p/\partial z \end{bmatrix}$$

$$grad\ \ p = \varrho\, \boldsymbol{f}$$

Hydrostatischer Druck

- Druckverteilung in einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte ϱ im Schwerefeld der Erde:

$$p = p_0 + \varrho\, g\, z$$