11 Wellenausbreitung in eindimensionalen Kontinua

Die Bernoulli'sche Lösung beschreibt die Schwingungen eindimensionaler Kontinua als Überlagerung von Eigenschwingungsformen. Für die eindimensionale Wellengleichung $\ddot{w} = c^2 w''$ lässt sich die Lösung in einer Formulierung von d'Alembert jedoch auch als eine Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen darstellen und interpretieren.

Bei der freien Schwingung wird die Anfangsbedingung in zwei Wellenprofile zerlegt, von denen sich das eine in die positive x-Richtung, das andere in die negative x-Richtung jeweils mit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit c ausbreitet. Bei endlichen Kontinua werden die Wellen an den Rändern reflektiert, wobei sich an festen Rändern das Vorzeichen umkehrt.

Die Wellenausbreitung ist eine grundsätzliche Lösung der eindimensionalen Wellengleichung und damit anwendbar auf Saite, Dehn- und Torsionsstab. Beim Balken dagegen lassen sich nur harmonische Biegewellen finden, welche die partielle Differentialgleichung $\ddot{w} + (EI/\varrho A)\, w^{IV} = 0$ lösen. Zudem zeigt sich ein Dispersionsverhalten, d.h. die Fortpflanzungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) der Wellen hängt von der Wellenlänge ab.

11.1 D'Alembert'sche Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Eindimensionale Wellengleichung

$\ddot{w} = c^2 w''$ mit

$c = \sqrt{\sigma/\varrho}$ Saite

$c = \sqrt{E/\varrho}$ Dehnstab

$c = \sqrt{G/\varrho}$ Torsionsstab

Koordinatentransformation $w(x,t) \rightarrow w(\xi,\eta)$ mit

$\xi := x - c\,t$

$\eta := x + c\,t$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \xi\, \partial \eta} = 0$$

Integration

$$w(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta)$$

Rücktransformation

D'Alembert'sche Lösung

$$w(x,t) = f_1(x - c\,t) + f_2(x + c\,t)$$

11.2 Einfluss von Anfangs- und Randbedingungen

Festlegung der Wellenprofile durch Anfangsbedingungen

Anfangsbedingungen: Lage: $w(x,0) = w_0(x)$
Geschwindigkeit: $\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$

eingesetzt in d'Alembert'sche Lösung

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\left[w_0(x) - \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(\bar{x})\,d\bar{x} + C_0\right]$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\left[w_0(x) + \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} \dot{w}_0(\bar{x})\,d\bar{x} - C_0\right]$$

eingesetzt in d'Alembert'sche Lösung

d'Alembert'sche Lösung der eindimensionalen Wellengleichung $\ddot{w} = c^2 w''$ mit den Anfangsbedingungen $w(x,0) = w_0(x),\ \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$:

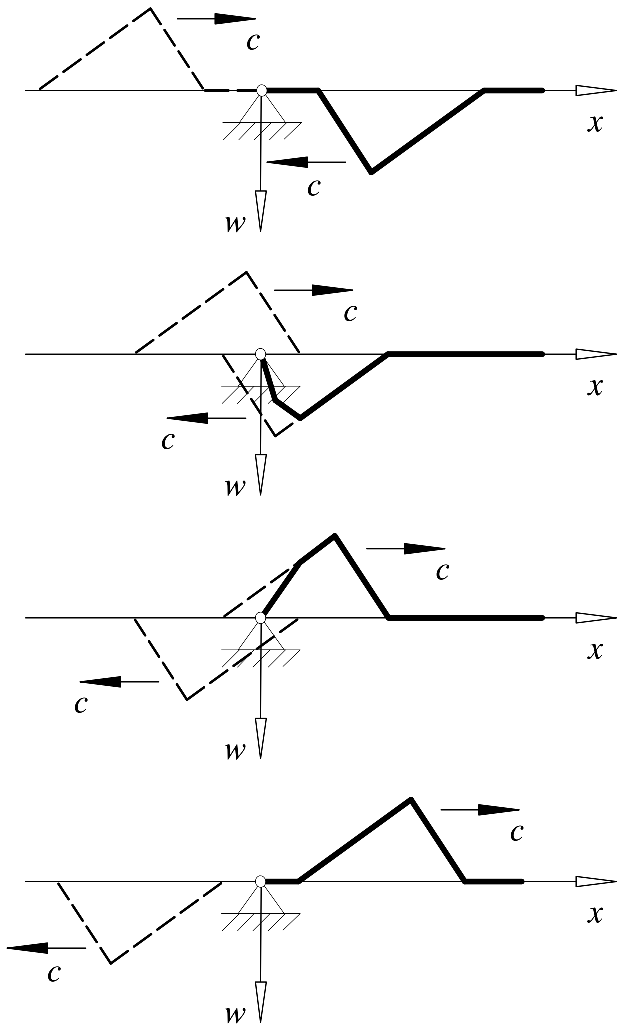
$$w(x,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x - c\,t) + w_0(x + c\,t) + \frac{1}{c}\int\limits_{x-c\,t}^{x+c\,t} \dot{w}_0(\bar{x})\,d\bar{x} \right]$$

speziell: verschwindende Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{w}(x,0) = 0$:

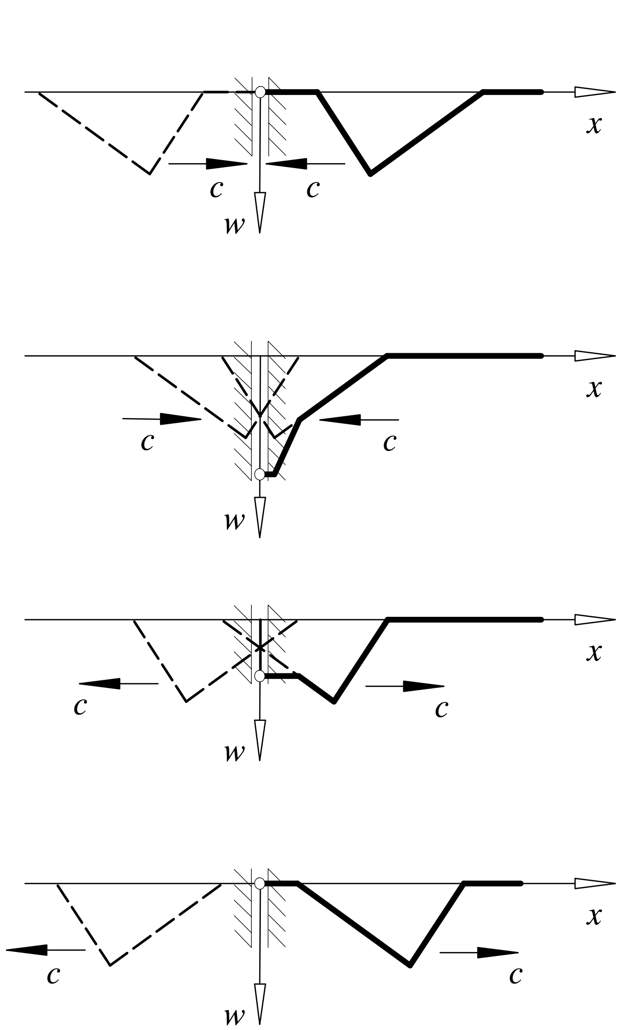
$$f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2} w_0(x)\,, \qquad w(x,t) = \frac{1}{2}\big[w_0(x - c\,t) + w_0(x + c\,t) \big]$$

Reflexion von Wellen an den Rändern

- fester Rand (z.B. $w(0,t) = 0$)



- freier Rand (z.B. $w'(0,t) = 0$)



11.3 Wellenausbreitung im Balken

Partielle Differentialgleichung der Balkenbiegung

$$\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A} w^{IV} = 0$$

Wellenansatz $w(x,t) = f(\xi)$ mit $\xi = x - c\,t$

$$f^{IV}(\xi) + \kappa^2 f'' = 0 \quad \text{mit} \quad \kappa^2 = c^2 \frac{\varrho A}{EI}$$

Integration

$$f(\xi) = A\,\xi + B + C\,\cos(\kappa\,\xi - \varphi)$$

Rücktransformation

$$w(x,t) = \underbrace{A(x - c\,t) + B}_{\text{Starrkörperbewegung}} + \underbrace{C\cos[\kappa(x - c\,t) - \varphi]}_{\text{harmonische Biegewellen}}$$