10 Erzwungene Schwingungen durch inhomogene Randbedingungen

Schwingungen eines kontinuierlichen Systems lassen sich nicht nur durch verteilte Kräfte, sondern auch durch zeitveränderliche Bindungen an den Rändern erzwingen. Treten keine verteilten Kräfte auf, sind die partiellen Differentialgleichungen homogen, die bislang homogenen Randbedingungen sind jedoch durch entsprechende inhomogene Bedingungen zu ersetzen.

Die Lösung dieses Problems erfolgt in zwei Schritten: Zunächst werden durch die Wahl einer geeigneten Funktion $w_R(x,t)$ die Randbedingungen befriedigt, ohne auf die Erfüllung der Differentialgleichung zu achten. Verwendet man als Lösungsansatz dann eine Summe $w = w_R + w_H$ bestehend aus dieser und einer vorerst noch unbekannten Funktion $w_H(x,t)$, erkennt man durch Einsetzen, dass die Randbedingungen homogen werden, während die Differentialgleichung inhomogen wird. Damit konnte das vorliegende Problem auf eine bereits gelöste Problemstellung transformiert werden, den erzwungenen Schwingungen aufgrund zeitveränderlicher verteilter Kräfte. Die Lösung des transformierten Problems erfolgt analog zum letzten Kapitel durch Modaltransformation und Superposition der homogenen und einer weiteren partikulären Lösung.

Damit setzt sich die Gesamtlösung aus den freien Schwingungen und zwei verschiedenen Partikulärlösungen zusammen, dem Lösungsansatz zur Befriedigung der inhomogenen Randbedingungen sowie der partikulären Lösung entsprechend der rechten Seite der entstehenden inhomogenen Differentialgleichung. Auch hier wird das Langzeitverhalten bei vorhandener innerer Dämpfung im Wesentlichen durch die Partikulärlösung bestimmt, da die freien Schwingungen im Laufe der Zeit abklingen.

10.1 Eindimensionale Wellengleichung

Homogene eindimensionale Wellengleichung mit inhomogenen Randbedingungen

Randwertproblem: $\ddot{w} = c^2 w''$

\+ inhomogene Randbed. für w, w'

Transformation auf homogene Randbedingungen

Ansatz: $w(x,t) = w_H(x,t) + w_R(x,t)$

erfüllt inhomogene Randbedingungen

$\ddot{w}_H = c^2 w''_H + q(x,t)$ mit $q(x,t) = c^2 w''_R - \ddot{w}_R$

\+ homogene Randbed. für w_H, w'_H

Lösung des transformierten Problems

Randwertproblem: $\ddot{w}_H = c^2 w''_H + q(x,t)$ + homogene Randbed. für w_H, w'_H

Lösung durch Modaltransformation

Superposition:
$$\begin{aligned} w_H(x,t) &= w_{H_h}(x,t) + w_{H_p}(x,t) \\ &= \boldsymbol{W}^T(x)\,\boldsymbol{y}_h(t) + \boldsymbol{W}^T(x)\,\boldsymbol{y}_p(t) \end{aligned}$$

Gesamtlösung durch Superposition

erzw. Schwingungen:
$$\begin{aligned} w(x,t) &= w_H(x,t) + w_R(x,t) \\ &= w_{H_h}(x,t) + w_{H_p}(x,t) + w_R(x,t) \end{aligned}$$

10.2 Balkenbiegung

Hom. Differentialgleichung der Balkenbiegung mit inhomogenen Randbedingungen

Randwertproblem: $\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A}\, w^{IV} = 0$

$+$ inhomogene Randbed. für $w,\ w',\ w'',\ w'''$

Transformation auf homogene Randbedingungen

Ansatz: $w(x,t) = w_H(x,t) + w_R(x,t)$

erfüllt inhomogene Randbedingungen

$$\ddot{w}_H + \frac{EI}{\varrho A}\, w_H^{IV} = q(x,t) \quad \text{mit} \quad q(x,t) = -\left(\ddot{w}_R + \frac{EI}{\varrho A}\, w_R^{IV}\right)$$

+ homogene Randbed. für w_H , w_H' , w_H'' , w_H'''

Lösung des transformierten Problems

Randwertproblem: $\ddot{w}_H + \frac{EI}{\varrho A}\, w_H^{IV} = q(x,t)$ + homogene Randbed.

Lösung durch Modaltransformation

Superposition:

$$\begin{aligned} w_H(x,t) &= w_{H_h}(x,t) + w_{H_p}(x,t) \\ &= \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}_h(t) + \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}_p(t) \end{aligned}$$

Gesamtlösung durch Superposition

erzw. Schwingungen:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= w_H(x,t) + w_R(x,t) \\ &= w_{H_h}(x,t) + w_{H_p}(x,t) + w_R(x,t) \end{aligned}$$

10.3 Zusammenfassung und Anmerkungen

	eindim. Wellengleichung (Saite, Stab, Torsion)	Balkenbiegung
a) Eigenlösungen		
hom. Differentialgleichung	$\ddot{w} = c^2 w''$	$\ddot{w} + \frac{EI}{\rho A} w^{IV} = 0$
+ hom Randbedingungen	$w,\ w' \vert_{Rand} = 0$	$w,\ w',\ w'',\ w''' \vert_{Rand} = 0$
Produktansatz $w(x,t) = W(x)\, y(t)$		
Ortsdifferentialgleichung	$W'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W = 0$	$W^{IV} - \gamma^4 W = 0\,,\quad \gamma^4 = \omega^2 \frac{\varrho A}{EI}$
Ansatz	$W = C \cos\frac{\omega}{c}x + D \sin\frac{\omega}{c}x$	$W = C\cos\gamma x + D\sin\gamma x + E\cosh\gamma x + F\sinh\gamma x$
+ Randbedingungen	$W,\ W' \vert_{Rand} = 0$	$W,\ W',\ W'',\ W''' \vert_{Rand} = 0$
+ Normierung	$\int_0^L W_i^2 \,\mathrm{d}x = 1$	
Eigenfrequenzen ω_k Eigenformen $W_k(x)$		
b) Freie Schwingungen		
hom. Differentialgleichung + hom. Randbedingungen + Anfangsbedingungen	} siehe a) $w(x,0) = w_0(x)\,,\quad \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$	
Modaltransformation $w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}(t)$		
Entkoppelte homogene gewöhnliche Differentialgl. + modale Anfangsbedingungen	$\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ *mit* $\boldsymbol{\Omega}^2 = \mathrm{diag}\{\omega_k^2\}$ $\boldsymbol{y}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W} w_0 \,\mathrm{d}x\,,\quad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W} \dot{w}_0 \,\mathrm{d}x$	
homogene Lösung		
modale Lösung	$y_k(t) = y_{0k} \cos(\omega_k t - \varphi_k)$	
Rücktransformation $w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}(t)$		
Freie Schwingung	$w(x,t) = \sum_k W_k(x)\, y_{0k} \cos(\omega_k t - \varphi_k)$	

	eindim. Wellengleichung (Saite, Stab, Torsion)	Balkenbiegung
c) Erzwungene Schwingungen durch verteilte Kräfte		
inhom. Differentialgleichung	$\ddot{w} = c^2 w'' + q(x,t)$	$\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A} w^{IV} = q(x,t)$
+ hom. Randbedingungen + Anfangsbedingungen	$\}$ siehe b)	
Modaltransformation $w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\,\boldsymbol{y}(t)$		
Entkoppelte inhomogene gewöhnliche Differentialgl.	$\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t) \quad mit \quad \boldsymbol{h}(t) = \int_0^L \boldsymbol{W} q \,\mathrm{d}x$	
+ modale Anfangsbedingungen	siehe b)	
homogene Lösung	$\ddot{\boldsymbol{y}}_h + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y}_h = \boldsymbol{0}$	
inhomogene Lösung	$\ddot{\boldsymbol{y}}_p + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y}_p = \boldsymbol{h}(t)$	
Superposition	$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{y}_p$	
modale Lösung		
Rücktransformation $w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\,\boldsymbol{y}(t)$		
Erzwungene Schwingung	$w(x,t) = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}_h + \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}_p$	
d) Erzwungene Schwingungen durch inhomogene Randbedingungen		
hom. Differentialgleichung	siehe a)	
+ inhom. Randbedingungen	$w,\ w' \vert_{Rand} \neq 0$	$w,\ w',\ w'',\ w''' \vert_{Rand} \neq 0$
+ Anfangsbedingungen	siehe b)	
Ansatz zur Erfüllung der Randbedingungen $w(x,t) = w_R(x,t) + w_H(x,t)$	$w_R, w'_R \vert_{Rand} \overset{!}{=} w, w' \vert_{Rand}$	$w_R, \ldots, w'''_R \vert_{Rand} \overset{!}{=} w, \ldots, w''' \vert_{Rand}$
inhom. Differentialgleichung + hom. Randbedingungen + Anfangsbedingungen	$\ddot{w}_H = c^2 w''_H + \underbrace{c^2 w''_R - \ddot{w}_R}_{q(x,t)}$	$\ddot{w}_H + \frac{EI}{\varrho A} w_H^{IV} = -\ddot{w}_R - \frac{EI}{\varrho A} w_R^{IV}$
Superposition $w(x,t) = w_R + w_H$	Lösung siehe c)	
Erzwungene Schwingung	$w(x,t) = w_{Hh} + w_{Hp} + w_R$	