9 Erzwungene Schwingungen durch verteilte Kräfte

Wirken auf ein kontinuierliches System verteilte zeitveränderliche Kräften bzw. Momente, entstehen erzwungene Schwingungen. In diesem Fall sind die partiellen Differentialgleichungen durch entsprechende Terme auf der rechten Seite zu ergänzen, die aus der Modellbildung folgen. Die Randbedingungen dagegen bleiben unverändert homogen.

Sind die Eigenschwingungsformen $W_k(x)$ der homogenen Differentialgleichung mit zugehörigen Randbedingungen bekannt, kann damit auch eine Modaltransformation $w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\,\boldsymbol{y}(t)$ des inhomogenen Problems durchgeführt werden. Als Ergebnis findet man entkoppelte, inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen für die Zeitfunktionen $y_k(t)$ mit entsprechenden Anfangsbedingungen, die ebenfalls aus der Modaltransformation folgen. Deren Lösung kann mit den bekannten Methoden für diskrete Systeme als Superposition einer homogenen und einer partikulären Lösung gefunden werden.

Durch Rücktransformation, d.h. Superposition der modalen Lösungen entsprechend der Eigenschwingungsformen, ergibt sich damit schließlich auch für $w(x,t)$ eine allgemeine Lösung in Form einer Überlagerung der bereits bekannten freien Schwingungen mit einer speziellen, der Anregung entsprechenden partikulären Lösung. Dieses Vorgehen ist sowohl auf Probleme anwendbar, die durch die eindimensionale Wellengleichung beschrieben werden, als auch auf Biegeschwingungen von schlanken Balken.

Es sei angemerkt, dass das Langzeitverhalten des kontinuierlichen Schwingers im Wesentlichen durch die Partikulärlösung bestimmt wird, da die freien Schwingungen aufgrund der stets vorhandenen inneren Dämpfung im Laufe der Zeit abklingen. Erregt man das System mit harmonischen Kräften, entstehen harmonische Schwingungen bestehend aus einer Überlagerung von Eigenformen, wobei deren Anteil von der Erregerfrequenz abhängt. Rückt die Erregerfrequenz in die Nähe einer Eigenfrequenz, tritt Resonanz auf, d.h. die zugehörige Eigenschwingungsform dominiert das Schwingungsverhalten, die Amplituden werden außerordentlich groß.

9.1 Kontinuierliche Systeme mit verteilten Kräften

Inhomogene eindimensionale Wellengleichung

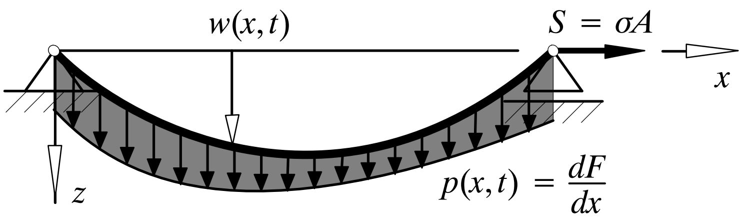
$$\ddot{w} = c^2 w'' + q(x,t) \qquad \text{mit}$$

- Saitenschwingung

$w(x,t)$ Durchhang

$c = \sqrt{\sigma/\varrho}$,

$q(x,t) = \dfrac{p(x,t)}{\varrho A}$

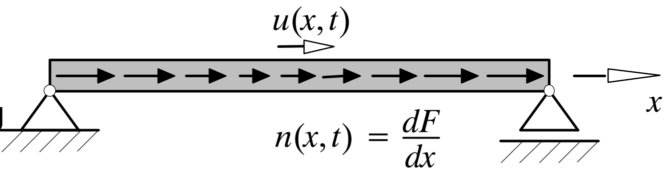


- Longitudinalschwingung

$w \mathrel{\hat{=}} u(x,t)$ Längsverschiebung

$c = \sqrt{E/\varrho}$,

$q(x,t) = \dfrac{n(x,t)}{\varrho A}$

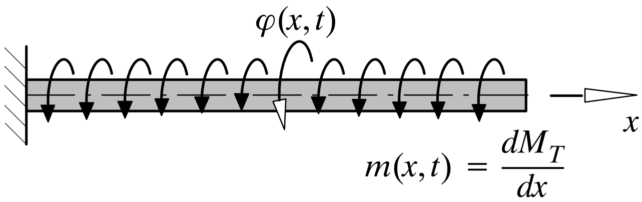


- Torsionsschwingung

$w \mathrel{\hat{=}} \varphi(x,t)$ Verdrehung

$c = \sqrt{G/\varrho}$,

$q(x,t) = \dfrac{m(x,t)}{\varrho I_p}$

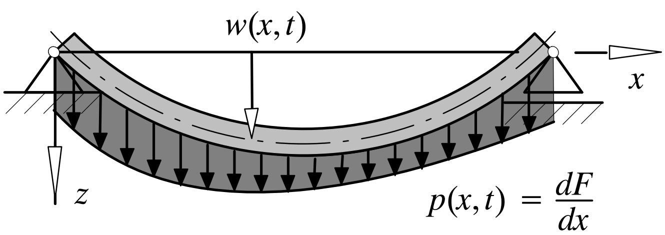


Biegeschwingungen

$$\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A} w^{IV} = q(x,t) \qquad \text{mit}$$

$w(x,t)$ Durchbiegung

$q(x,t) = \dfrac{p(x,t)}{\varrho A}$



9.2 Erzwungene Schwingungen der eindimensionalen Wellengleichung

Inhomogene eindimensionale Wellengleichung

Randwertproblem: $\ddot{w} = c^2 w'' + q(x,t)$ + homogene Randbed. für w, w'

Anfangsbedingungen: Lage: $w(x,0) = w_0(x)$

Geschwindigkeit: $\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$

Modaltransformation

Randwertproblem: $\ddot{w} = c^2 w'' + q(x,t)$ + homogene Randbed. für w, w'

modale Entwicklung

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x)\, y_k(t) = \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}(t)$$

Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, \boldsymbol{W}^T(x)\, dx = \boldsymbol{E}$$

Entkopplung: $\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$ mit $\boldsymbol{h}(t) = \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, q(x,t)\, dx$

modale Anfangsbedingungen

Lage: $w(x,0) = w_0(x) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 := \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, w_0(x)\, dx$

Geschwindigkeit: $\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}_0 := \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, \dot{w}_0(x)\, dx$

Lösung

Anfangswertproblem: $\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = h_k(t)\ , \quad y_k(0) = y_{0k}\ , \quad \dot{y}_k(0) = \dot{y}_{0k}$

modale Lösung: $y_k(t) = y_{hk}(t) + y_{pk}(t)$

Superposition

Schwingung:
$$w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}_h(t) + \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}_p(t) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x)\, y_{hk}(t) + \sum_{k=1}^{n} W_k(x)\, y_{pk}(t)$$

9.3 Erzwungene Schwingungen des Balkens

<u>Inhomogene Differentialgleichung der Balkenbiegung</u>

Randwertproblem: $\ddot{w} + \dfrac{EI}{\varrho A}\, w^{IV} = q(x,t)$ + homogene Randbed. für $w,\ w',\ w'',\ w'''$

Anfangsbedingungen: Lage: $w(x,0) = w_0(x)$

Geschwindigkeit: $\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$

<u>Modaltransformation</u>

Randwertproblem: $\ddot{w} + \dfrac{EI}{\varrho A}\, w^{IV} = q(x,t)$ + homogene Randbed. für $w,\ w',\ w'',\ w'''$

modale Entwicklung

$$w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}(t)$$

Orthogonalität der Eigenfunktionen

$$\int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, \boldsymbol{W}^T(x)\, dx = \boldsymbol{E}$$

Entkopplung: $\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$ mit $\boldsymbol{h}(t) = \displaystyle\int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, q(x,t)\, dx$

modale Anfangsbedingungen

Lage: $w(x,0) = w_0(x) \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0 := \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, w_0(x)\, dx$

Geschwindigkeit: $\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) \quad \rightarrow \quad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}_0 := \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, \dot{w}_0(x)\, dx$

Lösung

Anfangswertproblem: $\ddot{y}_k + \omega_k^2 y_k = h_k(t)\ , \quad y_k(0) = y_{0k}\ , \quad \dot{y}_k(0) = \dot{y}_{0k}$

modale Lösung: $y_k(t) = y_{h_k}(t) + y_{p_k}(t)$

Superposition

Schwingung:

$$\begin{aligned} w(x,t) &= \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}_h(t) + \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}_p(t) \\ &= \sum_{k=1}^{n} W_k(x)\, y_{h_k}(t) + \sum_{k=1}^{n} W_k(x)\, y_{p_k}(t) \end{aligned}$$