8 Freie Schwingungen kontinuierlicher Systeme

Freie Schwingungen sind Lösungen der partiellen Differentialgleichung für gegebene Anfangs- und Randbedingungen. Das Vorgehen ist für die eindimensionale Wellengleichung und die Balkenbiegung einheitlich und kann daher zusammenfassend dargestellt werden.

Ignoriert man zunächst die Anfangsbedingungen, erhält man mit Hilfe eines Produktansatzes $w(x,t) = W(x)\,y(t)$ die bereits bekannten Eigenlösungen, welche die homogene partielle Differentialgleichung und die gegebenen Randbedingungen unabhängig von den Anfangsbedingungen erfüllen. Diese Eigenlösungen sind durch harmonische Zeitfunktionen mit problemspezifischen Eigenfrequenzen ω_k und Eigenschwingungsformen $W_k(x)$ gekennzeichnet. Die Eigenschwingungsformen bilden ein vollständiges orthogonales Funktionensystem, d.h. das integrale Produkt verschiedener Eigenfunktionen verschwindet und durch eine gewichtete Summe lässt sich jede andere Funktion darstellen, die den Randbedingungen genügt. Durch Normierung des integralen Produkts gleicher Eigenfunktionen wird die weitere Rechnung vereinfacht.

Aufgrund der Linearität der partiellen Differentiallgleichungen ergeben sich damit die freien Schwingungen durch Superposition dieser Eigenlösungen. Die Differentialgleichung selbst und die Randbedingungen werden dabei entsprechend der Eigenschaft der Eigenschwingungsformen und des Superpositionsprinzips automatisch erfüllt, beliebige, mit den Randbedingungen verträgliche Anfangsbedingungen lassen sich durch geeignete Wahl der freien Konstanten der Eigenlösungen erfüllen. Damit stellen sich freie Schwingungen als Überlagerungen von Eigenschwingungen dar.

In der Praxis berücksichtigt man nur endlich viele Eigenschwingungen, die auch als Moden bezeichnet werden. Fasst man diese in einem Vektor zusammen, lassen sich obige Zusammenhänge unter Verwendung der Matrizenschreibweise übersichtlich darstellen. Die Orthogonalität der Eigenfunktionen erlaubt eine modale Entkopplung und damit eine direkte Lösung des Schwingungsproblems.

8.1 Superposition der Eigenlösungen

Anfangswertproblem des kontinuierlichen Schwingers

Randwertproblem:	Saite	$\ddot{w} = c^2 w''$	+ Randbed. für $w,\ w'$
	Balken	$\ddot{w} + (EI/\varrho A)\, w^{IV} = 0$	+ Randbed. für $w,\ w',\ w'',\ w'''$
Anfangsbedingungen:	Lage:	$w(x,0) = w_0(x)$	
	Geschwindigkeit:	$\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$	

Orthogonale Eigenschwingungsformen

Die Eigenlösungen $W_k(x)$ der eindimensionalen Wellengleichung bzw. der Balkenschwingungen sind orthogonal und seien wie folgt normiert:

$$\int_0^L W_i(x)\, W_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \textit{für } i \neq j \\ 1 & \textit{für } i = j \end{cases}$$

Superpositionsprinzip

Sind $w_1(x,t)$ und $w_2(x,t)$ jeweils Lösungen des entsprechenden Randwertproblems, dann auch $w(x,t) = w_1(x,t) + w_2(x,t)$.

Freie Schwingungen

Eigenlösungen $w_k(x,t) = W_k(x)\, y_k(t) = W_k(x)\, y_{0_k} \cos(\omega_k t - \varphi_k)$

Superposition

allgemeine Lösung $w(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x)\, y_{0_k} \cos(\omega_k t - \varphi_k)$

Anfangsbedingungen
$$w(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} W_k(x) \quad y_{0_k} \cos(-\varphi_k) \overset{!}{=} w_0(x)$$
$$\dot{w}(x,0) = -\sum_{k=1}^{\infty} W_k(x) \quad y_{0_k}\, \omega_k \sin(-\varphi_k) \overset{!}{=} \dot{w}_0(x)$$

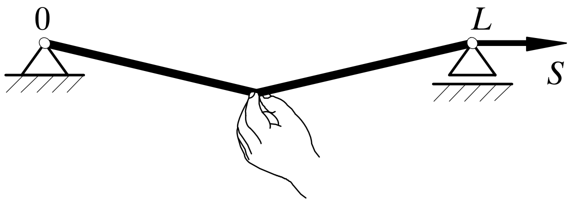
freie Konstanten
$$A_i := y_{0_i} \cos(-\varphi_i) = \int_0^L w_0(x)\, W_i(x)\, dx$$
$$B_i := -y_{0_i} \omega_i \sin(-\varphi_i) = \int_0^L \dot{w}_0(x)\, W_i(x)\, dx$$

Phase $\varphi_i = \arctan \frac{B_i/\omega_i}{A_i}$

Amplitude $y_{0_i} = A_i \cos\varphi_i + \frac{B_i}{\omega_i} \sin\varphi_i$

Beispiel: Saite mit fest−fester Einspannung

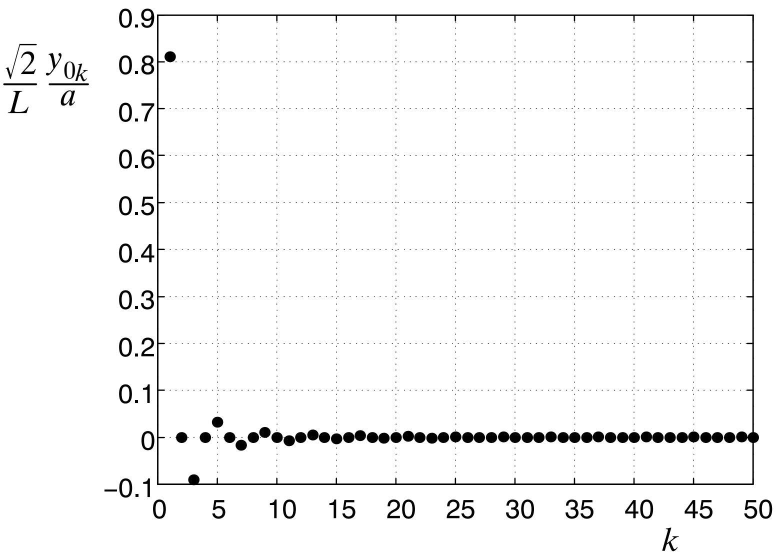
- dreiecksförmige Anfangsauslenkung

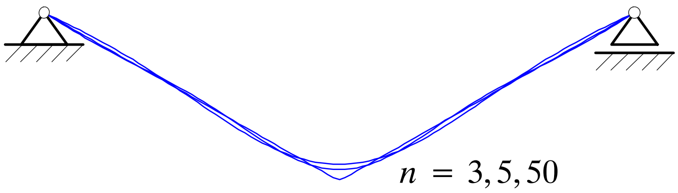


$$w_0(x) = \begin{cases} \dfrac{2a}{L}\, x & \textit{für} \quad 0 \le x \le \dfrac{L}{2} \\ \dfrac{2a}{L}(L - x) & \textit{für} \quad \dfrac{L}{2} \le x \le L \end{cases}$$

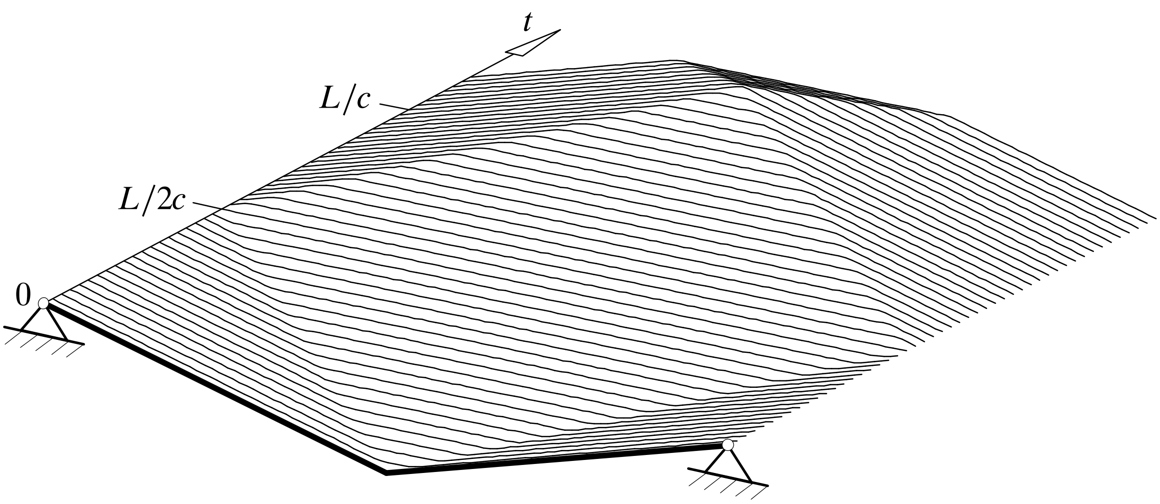
$$\dot{w}_0(x) = 0$$

- Einfluss der Approximationsordnung n auf die Wiedergabegenauigkeit der Anfangslage





- freie Schwingung



8.2 Matrizendarstellung

Allgemeine Lösung durch Superposition der Eigenlösungen

Im Allgemeinen beschränkt man sich bei der Darstellung der freien Schwingungen auf endlich viele, z.B. n Eigenfunktionen (Moden). Für $n \to \infty$ erhält man dann wieder die exakte Lösung.

$$w(x,t) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x)\, y_k(t) = \left[W_1(x) \;...\; W_n(x)\right] \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \boldsymbol{W}^T(x)\, \boldsymbol{y}(t)$$

Orthogonalitätsbedingung

$$\int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, \boldsymbol{W}^T(x)\, dx = \boldsymbol{E}$$

Modaltransformation des Anfangs-/Randwertproblems

Differentialgleichung $\quad \ddot{w} = c^2 w''$

bzw. $\quad \ddot{w} + (EI/\varrho A)\, w^{IV} = 0 \quad \xrightarrow{1} \quad \ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

Randbedingungen für $\quad w,\ w'$

bzw. $\quad w,\ w',\ w'',\ w''' \quad \xrightarrow{2}$ trivial erfüllt

Anfangsbedingungen: $\quad w(x,0) = w_0(x) \quad \xrightarrow{3} \quad \boldsymbol{y}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, w_0(x)\, dx$

$$\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) \qquad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, \dot{w}_0(x)\, dx$$

zu 1: Saite $\ddot{w} = c^2 w'' \quad \overset{w = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}}{\rightarrow} \quad \boldsymbol{W}^T \ddot{\boldsymbol{y}} = c^2 \boldsymbol{W}''^T \boldsymbol{y}$

$$\rightarrow \underbrace{\int_0^L \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T dx}_{\boldsymbol{E}} \; \ddot{\boldsymbol{y}} = \underbrace{\int_0^L \boldsymbol{W} c^2 \boldsymbol{W}''^T dx}_{-\boldsymbol{\Omega}^2} \; \boldsymbol{y} \;\rightarrow\; \ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

$$W_k'' + \frac{\omega_k^2}{c^2} W_k = 0$$

$$\rightarrow c^2 W_k'' = -W_k \,\omega_k^2$$

$$\rightarrow c^2 \left[W_1'' \ldots\right] = -\left[W_1 \; W_2 \ldots\right] \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 & \ldots \\ 0 & \omega_2^2 & \\ \vdots & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow c^2 \boldsymbol{W}''^T = -\boldsymbol{W}^T \boldsymbol{\Omega}^2$$

$$\rightarrow -\int_0^L \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T dx \;\; \boldsymbol{\Omega}^2 \equiv -\boldsymbol{\Omega}^2$$

Balken $\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A} w^{IV} = 0 \quad \overset{w = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}}{\rightarrow} \quad \boldsymbol{W}^T \ddot{\boldsymbol{y}} + \frac{EI}{\varrho A} \boldsymbol{W}^{IV^T} \boldsymbol{y} = 0$

$$\rightarrow \underbrace{\int_0^L \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T dx}_{\boldsymbol{E}} \; \ddot{\boldsymbol{y}} + \underbrace{\int_0^L \boldsymbol{W} \frac{EI}{\varrho A} \boldsymbol{W}^{IV^T} dx}_{\boldsymbol{\Omega}^2} \; \boldsymbol{y} = \underbrace{\int_0^L \boldsymbol{W}\, 0 \, dx}_{\boldsymbol{0}}$$

$$W_k^{IV} = \gamma_k^4 W_k \equiv \omega_k^2 \frac{\varrho A}{EI} W_k$$

$$\rightarrow \frac{EI}{\varrho A} W_k^{IV} = W_k \,\omega_k^2$$

$$\rightarrow \frac{EI}{\varrho A} \boldsymbol{W}^{IV^T} = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{\Omega}^2$$

$$\rightarrow \int_0^L \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T dx \;\; \boldsymbol{\Omega}^2 \equiv \boldsymbol{\Omega}^2$$

zu 2: Eigenfunktion erfüllen homogene Randbedingungen, z.B.

$$W_k(0) = 0 \;\Rightarrow\; \boldsymbol{W}(0) = \boldsymbol{0} \;\Rightarrow\; w(0,t) = \boldsymbol{W}^T(0)\,\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{0}^T \boldsymbol{y}(t) \equiv 0 \quad \checkmark$$

zu 3: $w(x,0) = w_0(x) \quad \overset{w = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}}{\rightarrow} \quad \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{y}(0) = w_0(x) \;\rightarrow\; \int_0^L \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T dx \;\; \boldsymbol{y}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W} w_0(x)\, dx$

$$\dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x) \quad \overset{\dot{w} = \boldsymbol{W}^T \dot{\boldsymbol{y}}}{\rightarrow} \quad \boldsymbol{W}^T \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{w}_0(x) \;\rightarrow\; \underbrace{\int_0^L \boldsymbol{W}\boldsymbol{W}^T dx}_{\boldsymbol{E}} \;\; \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W} \dot{w}_0(x)\, dx$$