7 Eigenschwingungen des Balkens

Wie die eindimensionale Wellengleichung besitzt auch die partielle Differentialgleichung $\ddot{w} + (EI/\varrho A)\, w^{IV} = 0$ für Balkenschwingungen Eigenlösungen, welche die Differentialgleichung und die homogenen Randbedingungen erfüllen. Um diese zu finden, wählt man in entsprechender Weise einen Bernoulli'schen Produktansatz, der die partielle Differentialgleichung in eine gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung bezüglich der Zeit und eine gewöhnliche Ortsdifferentialgleichung 4. Ordnung entkoppelt.

Während die Lösung der Zeitdifferentialgleichung wie bei der Wellengleichung auf eine harmonische Schwingung führt, werden die Lösungen der Ortsdifferentialgleichung im Unterschied zu den Eigenformen der Wellengleichung nun sowohl von trigonometrischen als auch von Hyperbelfunktionen gebildet. Die sich aus den Randbedingungen ergebende charakteristische Gleichung kann dadurch i. Allg. nicht mehr analytisch gelöst werden, sondern die Nullstellen der charakteristischen Funktionen und damit die Eigenfrequenzen des Balkens müssen numerisch durch Nullstellensuche gefunden werden. Der größeren Kombinationsvielfalt der vier Randbedingungen entsprechend ist auch die Vielfalt der verschiedenen Eigenfunktionen größer als bei der Wellengleichung.

Auch hier kann die Orthogonalität der Eigenfunktionen nachgewiesen und zur Normierung der Eigenfunktionenen verwendet werden. Durch Zusammensetzen der Eigenfunktionen und der Zeitlösungen entsprechend des Produktansatzes findet man die Eigenschwingungen des Balkens als zeitlich synchrone Schwingungen in Form der Eigenfunktionen. Auslenkungsmaxima und Nulldurchgänge erfolgen dabei für alle Punkte des Balken gleichzeitig.

7.1 Eigenlösungen

Partielle Differentialgleichung der Balkenbiegung

$$\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A} w^{IV} = 0$$

Produktansatz $w(x,t) = W(x)\, y(t)$

$$\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = -\frac{EI}{\varrho A} \frac{W^{IV}(x)}{W(x)} = const =: -\omega^2$$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$$

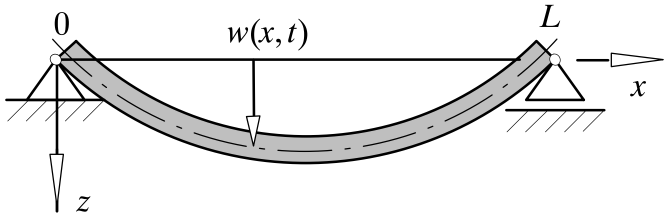
$$W^{IV}(x) - \gamma^4 W(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma^4 := \omega^2 \frac{\varrho A}{EI}$$

$$y(t) = A \cos\omega t + B \sin\omega t = y_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

$$W(x) = C \cos\gamma x + D \sin\gamma x + E \cosh\gamma x + F \sinh\gamma x$$

Festlegung der Konstanten ω durch die Randbedingungen

- Beispiel:
  gelenkig−gelenkige Lagerung



$$w(0,t) = 0$$

$$w''(0,t) = 0$$

$$w(L,t) = 0$$

$$w''(L,t) = 0$$

⇩

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ \cos\gamma L & \sin\gamma L & \cosh\gamma L & \sinh\gamma L \\ -\cos\gamma L & -\sin\gamma L & \cosh\gamma L & \sinh\gamma L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \\ E \\ F \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

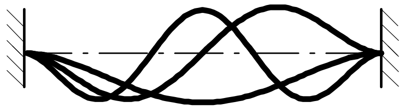
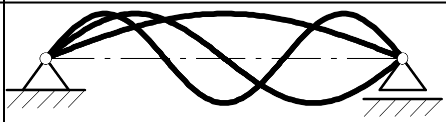
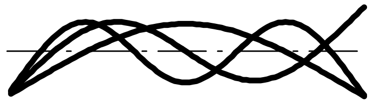
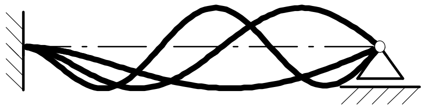
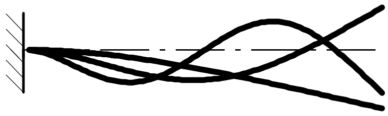
⇩

charakteristische Gleichung $\sin\gamma L = 0$

Eigenfrequenzen $\omega_k = \gamma_k^2 \sqrt{\dfrac{EI}{\varrho A}} = k^2\pi^2 \sqrt{\dfrac{EI}{\varrho A L^4}}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$

Eigenformen $W_k(x) = D_k \sin\left(\gamma_k L \dfrac{x}{L}\right) = D_k \sin\dfrac{k\pi\,x}{L}\,, \quad k = 1, 2, \ldots$

- Allgemeine Einspannung

<table>
<tr><th rowspan="2">Lagerung</th><th colspan="3">Eigenfrequenzen $\omega_k = (\gamma_k L)^2 \sqrt{EI/\varrho A L^4}$</th><th rowspan="2">Eigenformen für $k = 1, 2, 3$</th></tr>
<tr><th>$(\gamma_1 L)^2$</th><th>$(\gamma_2 L)^2$</th><th>$(\gamma_3 L)^2$ ...</th></tr>
<tr><td rowspan="2">fest – fest</td><td colspan="3">$1 - \cos\gamma L \cosh\gamma L = 0$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>22.4</td><td>61.7</td><td>120.9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">gelenkig – gelenkig</td><td colspan="3">$\sin\gamma L = 0$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>9.87</td><td>39.5</td><td>88.8</td></tr>
<tr><td rowspan="2">frei – frei</td><td colspan="3">$1 - \cos\gamma L \cosh\gamma L = 0$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>22.4</td><td>61.7</td><td>120.9</td></tr>
<tr><td rowspan="2">fest – gelenkig</td><td colspan="3">$\tan\gamma L - \tanh\gamma L = 0$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>15.4</td><td>50.0</td><td>104.2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">fest – frei</td><td colspan="3">$1 + \cos\gamma L \cosh\gamma L = 0$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>3.52</td><td>22.0</td><td>61.7</td></tr>
</table>

7.2 Orthogonalität der Eigenfunktionen

Orthogonalitätsbedingung

Die Eigenfunktionen der Balkenbiegung lassen sich stets wie folgt normieren:

$$\int_0^L W_i(x)\, W_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Begründung:

- für $i \neq j$: ω_k , $W_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ erfüllen Dgl. $W^{IV} - \gamma^4 W = 0$ und hom. Randbed.

$$\overset{k=i}{\rightarrow} \quad \gamma_i^4 W_i = W_i^{IV} \qquad (1) \quad \big|\, W_j$$

$$\overset{k=j}{\rightarrow} \quad \gamma_j^4 W_j = W_j^{IV} \qquad (2) \quad \big|\, W_i$$

subtr.+integr.: $$\left(\gamma_i^4 - \gamma_j^4\right) \int_0^L W_i\, W_j\, dx = \int_0^L \left(W_i^{IV} W_j - W_j^{IV} W_i\right) dx$$

partielle Integration

$$= W_i''' \, W_j\Big|_0^L - W_j''' \, W_i\Big|_0^L - \int_0^L \left(W_i''' \, W_j' - W_j''' \, W_i'\right) dx$$

partielle Integration

$$= W_i''' \, W_j\Big|_0^L - W_j''' \, W_i\Big|_0^L - W_i'' \, W_j'\Big|_0^L + W_j'' \, W_i'\Big|_0^L + \int_0^L \left(W_i'' \, W_j'' - W_j'' \, W_i''\right) dx$$

hom. RB: $W = 0 \vee Q \sim W''' = 0 \Rightarrow W''' W\big|_{0,L} = 0$

$W' = 0 \vee M \sim W'' = 0 \Rightarrow W'' W'\big|_{0,L} = 0$

$$= 0 \quad \overset{\gamma_i \neq \gamma_j}{\Rightarrow} \quad \int_0^L W_i\, W_j\, dx = 0 \quad ✓$$

- für $i = j$: $W_i(x)$ nur bis auf einen freien Faktor bestimmt → Normierung möglich

7.3 Eigenschwingungen

Partielle Differentialgleichung

$$\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A} w^{IV} = 0$$

Produktansatz $w(x,t) = W(x)\, y(t)$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \qquad W^{IV}(x) - \gamma^4 W(x) = 0 \quad \text{mit} \quad \gamma^4 := \omega^2 \frac{\varrho A}{EI}$$

$$W(x) = C \cos\gamma x + D \sin\gamma x + E \cosh\gamma x + F \sinh\gamma x$$

homogene Randbedingungen

Eigenfrequenzen $\omega_k, \quad k = 1, 2, \ldots$

C_k, D_k, E_k, F_k

$$y_k(t) = y_{0_k} \cos(\omega_k t - \varphi_k) \qquad W_k(x) = C_k \cos\gamma_k x + D_k \sin\gamma_k x + E_k \cosh\gamma_k x + F_k \sinh\gamma_k x$$

$$w_k(x,t) = W_k(x)\, y_k(t)$$

Eigenschwingungen

$$w_k(x,t) = y_{0_k} \left(C_k \cos\gamma_k x + D_k \sin\gamma_k x + E_k \cosh\gamma_k x + F_k \sinh\gamma_k x \right) \cos(\omega_k t - \varphi_k)$$