6 Eigenlösungen der eindimensionalen Wellengleichung

Kontinuierliche Systeme lassen sich als Schwinger mit unendlich vielen Freiheitsgraden interpretieren. Daher ist ein ähnliches Lösungsverhalten wie bei linearen diskreten Systemen zu erwarten, d.h. die allgemeine Lösung ergibt sich als Superposition von Eigenlösungen, die für das System charakteristisch sind. Eigenschwingungen konservativer diskreter Systeme sind durch eine synchrone harmonische Veränderung aller Koordinaten gekennzeichnet, wobei die Verhältnisse der Koordinaten zueinander durch die Eigenvektoren, die Schwingungsperioden durch die Eigenfrequenzen bestimmt sind. Die Zahl der verschiedenen Eigenschwingungen entspricht dem Freiheitsgrad des Systems.

Für kontinuierliche Systeme gilt $f \to \infty$, so dass unendlich viele Eigenfrequenzen auftreten. Die Eigenvektoren gehen über in charakteristische Eigenfunktionen für die Verformungsfunktionen. Damit stellen sich Eigenlösungen kontinuierlicher Systeme als Produkte reiner Ortsfunktionen und reiner Zeitfunktionen dar. Ein solcher Produktansatz geht auf Daniel Bernoulli zurück und wird daher auch als Bernoulli'sche Lösung bezeichnet. Der Produktansatz spaltet die partielle Differentialgleichung auf in je eine zeitliche und eine räumliche gewöhnliche Differentialgleichung. Letztere liefert in Verbindung mit den Randbedingungen die Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen. Saitenschwingungen sowie Longitudinalschwingungen und Torsionsschwingungen von Stäben führen auf dieselbe eindimensionale Wellengleichung $\ddot{w} = c^2 w''$ mit lediglich unterschiedlicher Parameterabhängigkeit der Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit c. Daher ergeben sich identische Beziehungen für die Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen, die sich aus trigonometrischen Funktionen zusammensetzen.

Die Eigenfunktionen sind zueinander orthogonal, d.h. das Integral des Produkts zweier verschiedener Eigenfunktionen verschwindet. Diese Eigenschaft wird sich später bei der Modaltransformation als nützlich erweisen. Weiterhin sind Eigenfunktionen nur bis auf einen freien Faktor bestimmt. Aus den Orthogonalitätsbeziehungen lässt sich eine sinnvolle Normierungsbedingung für diesen Faktor ableiten.

Setzt man die Eigenfunktionen und die Zeitlösungen entsprechend des Produktansatzes wieder zusammen, erhält man die Eigenschwingungen des Kontinuums als zeitlich synchrone Schwingung in Form der Eigenfunktionen. Schwingungsmaxima und Nulldurchgänge erfolgen dabei für alle Punkte des Kontinuums gleichzeitig.

6.1 Eigenlösungen

Eindimensionale Wellengleichung

$\ddot{w} = c^2 w''$ mit

- Saitenschwingung: $c = \sqrt{\sigma/\varrho}$, $w(x,t)$ Durchhang
- Longitudinalschwingung: $c = \sqrt{E/\varrho}$, $w \mathrel{\hat{=}} u(x,t)$ Längsverschiebung
- Torsionsschwingung: $c = \sqrt{G/\varrho}$, $w \mathrel{\hat{=}} \varphi(x,t)$ Verdrehung

Produktansatz $w(x,t) = W(x)\, y(t)$

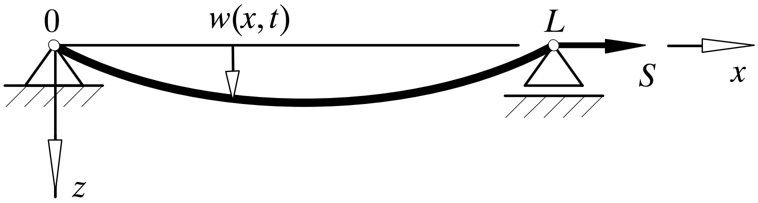
$$\frac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = c^2 \frac{W''(x)}{W(x)} = const =: -\omega^2$$

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \qquad\qquad W''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W(x) = 0$$

$$\begin{aligned} y(t) &= A \cos\omega t + B \sin\omega t \\ &= y_0 \cos(\omega t - \varphi) \end{aligned} \qquad\qquad W(x) = C \cos\frac{\omega}{c}x + D \sin\frac{\omega}{c}x$$

Festlegung der Konstanten ω durch die Randbedingungen

- Beispiel:
  fest–feste Einspannung



$$w(0,t) = 0$$

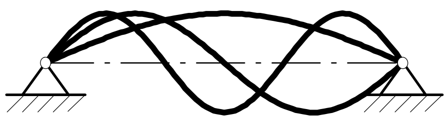
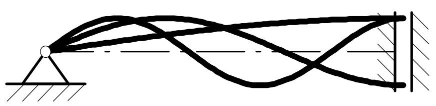
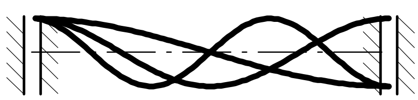
$$w(L,t) = 0$$

charakteristische Gleichung $\quad \sin\frac{\omega}{c}L = 0$

Eigenfrequenzen $\quad \omega_k = k\,\frac{\pi c}{L}\,, \quad k = 1,2,...$

Eigenformen $\quad W_k(x) = D_k \sin\frac{k\pi\, x}{L}\,, \quad k = 1,2,...$

- Allgemeine Einspannung

Einspannung	char. Gleichung	Eigenfrequenzen (k=1,2,...)	Eigenformen der Saite (k=1,2,3)
fest – fest	$\sin\frac{\omega}{c}L = 0$	$\omega_k = k\,\frac{\pi c}{L}$	
fest – frei	$\cos\frac{\omega}{c}L = 0$	$\omega_k = \frac{2k-1}{2}\,\frac{\pi c}{L}$	
frei – frei	$\sin\frac{\omega}{c}L = 0$	$\omega_k = k\,\frac{\pi c}{L}$	

Anmerkung zur Wahl einer negativen Konstanten $(-\,\omega^2)$

allgemein: $\dfrac{\ddot{y}(t)}{y(t)} = c^2\,\dfrac{W''(x)}{W(x)} = const =: k \in \mathbb{R}$

Fallunterscheidung (am Beispiel der fest–festen Einspannung)

- $k = 0$

$\Rightarrow\ W'' = 0$

$\Rightarrow\ W' = A,\ W = Ax + B,\ A, B \in \mathbb{R}$

Randbedingungen $W(0) = B \overset{!}{=} 0$

$W(L) = A\,L + B \overset{!}{=} 0$

Lösung $\Rightarrow\ W(x) \equiv 0$ trivial

- $k := \omega^2 > 0$

$\Rightarrow\ W'' - \dfrac{\omega^2}{c^2}\,W = 0$

Ansatz $W = A\,e^{\lambda x},\ A \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow\ W' = \lambda\,A\,e^{\lambda x},\ W'' = \lambda^2 A\,e^{\lambda x}$

eingesetzt $\left(\lambda^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}\right) A\,e^{\lambda x} = 0$

$\Rightarrow\ \lambda^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ bzw. $\lambda_{1,2} = \pm\,\dfrac{\omega}{c} \in \mathbb{R}$

Superposition $W = A\,e^{\frac{\omega}{c}x} + B\,e^{-\frac{\omega}{c}x}$

Randbedingungen $W(0) = A + B \overset{!}{=} 0$

$W(L) = A\,e^{\frac{\omega}{c}L} + B\,e^{-\frac{\omega}{c}L} \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow\ A = B = 0$

Lösung $\Rightarrow\ W(x) \equiv 0$ trivial

- $k := -\,\omega^2 < 0$ liefert allein eine nicht triviale Lösung $W(x)$, s.o.

6.2 Orthogonalität der Eigenfunktionen

Orthogonalitätsbedingung

Die Eigenfunktionen der eindimensionalen Wellengleichung mit homogenen Randbedingungen lassen sich stets wie folgt normieren:

$$\int_0^L W_i(x)\, W_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$$

Begründung:

- für $i \neq j$: ω_k , $W_k(x)$, $k = 1, 2, ...$ erfüllen Dgl. $W'' + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W = 0$ und hom. Randbed.

$$\overset{k=i}{\rightarrow} \quad \frac{\omega_i^2}{c^2} W_i = -W_i'' \qquad (1) \quad \left| W_j \right.$$

$$\overset{k=j}{\rightarrow} \quad \frac{\omega_j^2}{c^2} W_j = -W_j'' \qquad (2) \quad \left| W_i \right.$$

subtr.+integr.: $$\frac{\omega_i^2 - \omega_j^2}{c^2} \int_0^L W_i\, W_j\, dx = \int_0^L \left(W_j''\, W_i - W_i''\, W_j \right) dx$$

partielle Integration

$$= W_j' W_i \Big|_0^L - W_i' W_j \Big|_0^L - \int_0^L \left(W_j' W_i' - W_i' W_j' \right) dx$$

homogene RB: $W = 0 \vee W' = 0$

$$\Rightarrow W W' \big|_{0,L} = 0$$

$$= 0 \quad \overset{\omega_i \neq \omega_j}{\Rightarrow} \quad \int_0^L W_i\, W_j\, dx = 0 \quad ✓$$

- für $i = j$: $W_i(x)$ nur bis auf einen freien Faktor bestimmt → Normierung möglich

6.3 Eigenschwingungen

Partielle
Differentialgleichung $\ddot{w} = c^2 w''$

Produktansatz $w(x,t) = W(x)\,y(t)$

Gewöhnliche
Differentialgleichungen

$$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \qquad W''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W(x) = 0$$

$W(x) = C\,\cos\frac{\omega}{c}x + D\,\sin\frac{\omega}{c}x$
homogene Randbedingungen

Eigenfrequenzen $\omega_k\,,\quad k = 1, 2, ...$

$C_k\,,\ D_k$

$$y_k(t) = y_{0_k}\,\cos(\omega_k t - \varphi_k) \qquad W_k(x) = C_k\,\cos\frac{\omega_k}{c}x + D_k\,\sin\frac{\omega_k}{c}x$$

$w_k(x,t) = W_k(x)\,y_k(t)$

Eigenschwingungen

$$w_k(x,t) = y_{0_k}\left(C_k\,\cos\frac{\omega_k}{c}x + D_k\,\sin\frac{\omega_k}{c}x\right)\cos(\omega_k t - \varphi_k)$$