4 Erzwungene Schwingungen konservativer Schwingungssysteme

Die allgemeine Lösung einer inhomogenen linearen Schwingungsgleichung findet man durch Überlagerung der homogenen Lösung (freie Schwingungen) mit einer erregungsspezifischen Partikulärlösung. Aufgrund einer in der Realität immer vorhandenen Dämpfung klingt die homogene Lösung im Laufe der Zeit ab, weshalb das Langzeitverhalten des Schwingungssystems allein durch die Partikulärlösung bestimmt wird und dieser deshalb entscheidende Bedeutung zukommt.

Die Bestimmung der Partikulärlösung kann durch modale Entkopplung wesentlich vereinfacht werden. Dazu baut man aus den massenorthogonalen Eigenvektoren spaltenweise die sogenannte Modalmatrix auf, die eine Koordinatentransformation zwischen den modalen Koordinaten und den physikalischen Koordinaten vermittelt. Zunächst angewandt auf die homogene Bewegungsgleichung entkoppeln sich die Differentialgleichungen, jede einzelne modale Gleichung entspricht dann einem Schwinger mit einem Freiheitsgrad mit bekannter harmonischer Lösung. Durch Rücktransformation auf physikalische Koordinaten werden diese Lösungen superponiert und man erhält das bereits bekannte Ergebnis.

Auch für inhomogene Bewegungsgleichungen entstehen durch die Modaltransformation entkoppelte Differentialgleichungen, wobei sich die modale Erregung durch Projektion des Erregervektors auf die Eigenvektoren ergibt. Deren allgemeine Lösung setzt sich aus einer harmonischen homogenen Lösung und einer der Erregung entsprechenden inhomogenen Lösung zusammen. Die Gesamtlösung findet man dann wieder durch Superposition der modalen Lösungen, die jeweils mit den entsprechenden Eigenvektoren gewichtet werden und somit als Überlagerung der Eigenschwingungsformen interpretiert werden können.

Bei harmonischer Erregung mit vorgegebener Erregerfrequenz wird dies besonders deutlich. Die Partikulärlösung folgt der äußeren Erregung synchron mit der Anregungsfrequenz, jedoch in den einzelnen Eigenschwingungsformen mit unterschiedlicher, frequenzabhängig gewichteter Amplitude. Fällt die Erregerfrequenz mit einer Eigenfrequenz des Systems zusammen, wachsen die Amplituden der zugehörigen Schwingungseigenform über alle Grenzen (strenge Resonanz), wodurch die Eigenschwingungsformen des Systems deutlich sichtbar werden. Alternativ kann die Partikulärlösung auch direkt mit Hilfe der Frequenzgangmatrix gefunden werden.

Bei Systemen mit mehreren Freiheitsgraden besteht die Möglichkeit, dass bei harmonischer Erregung trotz äußerer Krafteinwirkung einzelne Bewegungsgrößen nicht mitschwingen, weil die Krafteinwirkung durch gegenphasiges Schwingen von Teilsystemen kompensiert wird. Dieses Phänomen bezeichnet man als Tilgung und nutzt es in der Technik zur Schwingungsreduktion.

4.1 Modaltransformation der homogenen Bewegungsgleichung

Voraussetzung

massenorthogonale Eigenvektoren:
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_i^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_j = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad i \neq j \\ 1 & \textit{für} \quad i = j \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_i^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_j = \begin{cases} 0 & \textit{für} \quad i \neq j \\ \omega_i^2 & \textit{für} \quad i = j \end{cases}$$

Modalmatrix

Die normierten Eigenvektoren können zu einer **Modalmatrix** $\boldsymbol{Y} := \begin{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}}_1 & \tilde{\boldsymbol{y}}_2 & \ldots & \tilde{\boldsymbol{y}}_f \end{bmatrix}$ zusammengefasst werden.

Für massenorthogonale Eigenvektoren gilt dann

$$\boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{M} \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{K} \boldsymbol{Y} = diag\{\omega_k^2\} =: \boldsymbol{\Omega}^2 \ .$$

Modaltransformation des Anfangswertproblems

homogenes Anfangswertproblem

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0\,,\qquad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}_0$$

→ modale Entkopplung $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{y}}$ →

entkoppelte Gleichungen

$$\ddot{\hat{\boldsymbol{y}}} + \boldsymbol{\Omega}^2\hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$$

$$\hat{\boldsymbol{y}}(0) = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}_0\,,\qquad \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}(0) = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{y}}_0$$

↓

Lösung der entkoppelten modalen Gleichungen

$$\ddot{\hat{y}}_k + \omega_k^2\hat{y}_k = 0$$

$$\rightarrow\quad \hat{y}_k(t) = a_k\cos(\omega_k t - \varphi_k)$$

← Rücktransformation $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{y}}$ ←

Superposition der modalen Lösungen

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=1}^{f} a_k\tilde{\boldsymbol{y}}_k\cos(\omega_k t - \varphi_k)$$

4.2 Modaltransformation der inhomogenen Bewegungsgleichung

Anfangswertproblem eines konservativen Schwingungssystems mit Fremderregung

Lineare
Bewegungsgleichung: $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$

Anfangsbedingungen: Lage: $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$
Geschwindigkeit: $\dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}_0$

Modaltransformation $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{y}}(t), \quad \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{E}$

Modale Entkopplung

in Modalkoordinaten: $\ddot{\hat{\boldsymbol{y}}} + \boldsymbol{\Omega}^2\hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{h}}(t), \quad \hat{\boldsymbol{y}}(0) = \hat{\boldsymbol{y}}_0, \quad \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}(0) = \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_0$

mit $\hat{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{h}, \quad \hat{\boldsymbol{y}}_0 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{y}_0, \quad \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}_0 = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{M}\dot{\boldsymbol{y}}_0$

Allgemeine Lösung für die k-te modale Koordinate

Schwingungsgleichung: $\ddot{\hat{y}}_k + \omega_k^2\hat{y}_k = \hat{h}_k(t), \quad \hat{y}_k(0) = \hat{y}_{0k}, \quad \dot{\hat{y}}_k(0) = \dot{\hat{y}}_{0k}$

homogene Lösung: $\ddot{\hat{y}}_{hk} + \omega_k^2\hat{y}_{hk} = 0$

inhomogene Lösung: $\ddot{\hat{y}}_{pk} + \omega_k^2\hat{y}_{pk} = \hat{h}_k(t)$

→ allg. Lösung
durch Superposition: $\hat{y}_k(t) = \hat{y}_{hk}(t) + \hat{y}_{pk}(t)$

Superposition der modalen Lösungen

Rücktransformation:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{Y}\left(\hat{\boldsymbol{y}}_h(t) + \hat{\boldsymbol{y}}_p(t)\right) \\ &= \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{y}}_h(t) + \boldsymbol{Y}\hat{\boldsymbol{y}}_p(t) \end{aligned}$$

4.3 Harmonische Erregung

Linearer, konservativer Schwinger mit harmonischer Erregung

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_0 \cos\Omega t$$

Bestimmung der Partikulärlösung mit Hilfe der Modaltransformation

Bewegungsgleichung: $\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_0 \cos\Omega t$

Modaltransformation

modale Schwingungsgleichung: $\ddot{\hat{y}}_k + \omega_k^2 \hat{y}_k = \hat{h}_{0k} \cos\Omega t$

Superposition der modalen Partikulärlösungen:

$$\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{Y}\,\hat{\boldsymbol{y}}_p(t)$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{f} \tilde{\boldsymbol{y}}_k \frac{\hat{h}_{0k}}{\omega_k^2 - \Omega^2}\right] \cos\Omega t = \left[\sum_{k=1}^{f} \frac{\tilde{\boldsymbol{y}}_k \tilde{\boldsymbol{y}}_k^T}{\omega_k^2 - \Omega^2}\right] \boldsymbol{h}_0 \cos\Omega t$$

Direkte Bestimmung der Partikulärlösung

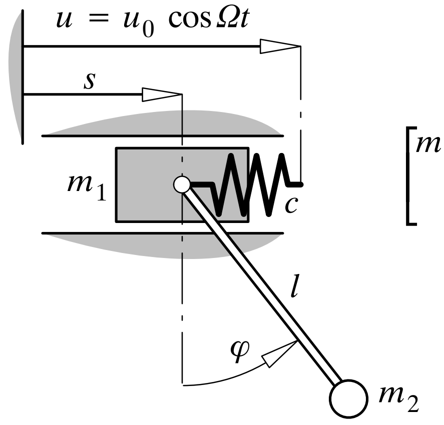
Bewegungsgleichung: $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}_0 \cos\Omega t$

Ansatz: $\boldsymbol{y}_p(t) = \boldsymbol{r}_0 \cos\Omega t$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{r}_0 = \left(-\boldsymbol{M}\,\Omega^2 + \boldsymbol{K}\right)^{-1} \boldsymbol{h}_0 \quad \text{für} \quad \Omega \neq \omega_k$$

Lösung: $\boldsymbol{y}_p(t) = \left(-\boldsymbol{M}\,\Omega^2 + \boldsymbol{K}\right)^{-1} \boldsymbol{h}_0 \cos\Omega t$

Beispiel: Amplitudengang einer Laufkatze mit pendelnder Last



$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & m_2 g l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c\,u_0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos\Omega t$$

$m_1 = 0.1$ kg, $m_2 = 0.288$ kg, $c = 14.4$ N/m,
$l = 0.3924$ m, $u_0 = 0.01$ m