3 Freie Koppelschwingungen konservativer Schwingungssysteme

Das Eigenschwingungsverhalten ungedämpfter Systeme ohne äußere Erregung kann durch trigonometrische Funktionen beschrieben werden, deren Frequenzen systemspezifisch sind und als Eigenfrequenzen des Systems bezeichnet werden. Die Eigenfrequenzen werden mit Hilfe der charakteristischen Gleichung ermittelt, die sich durch einen trigonometrischen Lösungsansatz aus den Bewegungsgleichungen ergibt. Zu jeder Eigenfrequenz lässt sich eine charakteristische Schwingungseigenform finden, bei der sich alle Bewegungsfreiheiten synchron verändern. Die Schwingungseigenformen werden durch die Eigenvektoren beschrieben, die man aus dem Eigenwertproblem durch Einsetzen der verschiedenen Eigenfrequenzen erhält.

Die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichungen findet man durch Superposition der Eigenlösungen. Mit Hilfe der darin enthaltenen freien Konstanten kann die Lösung an beliebige Anfangsbedingungen der Lage und Geschwindigkeit angepasst werden. Im allgemeinen Fall erhält man gekoppelte Schwingungen in allen Koordinaten als Überlagerung aller Eigenschwingungen. Nur für spezielle Anfangsbedingungen können die Eigenschwingungen einzeln sichtbar gemacht werden.

Die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenfrequenzen sind bezüglich der Massen- und Steifigkeitsmatrix orthogonal bzw. bei mehrfachen Eigenfrequenzen orthogonalisierbar. Sie bleiben in ihrer Länge unbestimmt und können frei normiert werden. Für die spätere Modaltransformation eignet sich besonders eine Normierung bezüglich der Massenmatrix, die Eigenvektoren heißen dann massenorthogonal.

3.1 Eigenschwingungen

Lineare Bewegungsgleichung eines freien, konservativen Schwingungssystems

$$\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$$

Die Massenmatrix ist i. Allg. positiv definit, d.h. $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{M}\boldsymbol{y} > 0$ für alle $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$, die Steifigkeitsmatrix ist mindestens positiv semidefinit, d.h. $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{K}\boldsymbol{y} \geq 0$ für alle $\boldsymbol{y}$.

Eigenlösungen

Lösungsansatz: $\boldsymbol{y}(t) = \tilde{\boldsymbol{y}} \cos(\omega t - \varphi)$

Allgemeines Eigenwertproblem: $\left(-\boldsymbol{M}\omega^2 + \boldsymbol{K}\right)\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$

charakteristische Gleichung: $\det\left(-\boldsymbol{M}\omega^2 + \boldsymbol{K}\right) = 0$

Eigenvektoren: Durch Einsetzen der Eigenfrequenzen ω_k, $k = 1(1)f$, in das allgemeine Eigenwertproblem findet man die Eigenvektoren $\tilde{\boldsymbol{y}}_k$, $k = 1(1)f$:

$$\left(- \boldsymbol{M}\, \omega_k^2 + \boldsymbol{K} \right) \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_k$$

3.2 Freie Schwingungen

Anfangswertproblem eines freien, konservativen Schwingungssystems

Lineare Bewegungsgleichung: $\boldsymbol{M}\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

Anfangsbedingungen: Lage: $\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0$

Geschwindigkeit: $\dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}_0$

Superpositionsprinzip

Sind $\boldsymbol{y}_1(t)$ und $\boldsymbol{y}_2(t)$ Lösungen der Bewegungsgleichungen, dann auch $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}_1(t) + \boldsymbol{y}_2(t)$.

→ Durch Superposition der Eigenschwingungen ergibt sich die allgemeine Lösung der Bewegungsgleichung:

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=1}^{f} \tilde{\boldsymbol{y}}_k \cos(\omega_k t - \varphi_k)$$

Allgemeines Vorgehen zur Lösung des Anfangswertproblems

1) Aufstellen der charakteristischen Gleichung

$$\det\left(-\boldsymbol{M}\omega^2 + \boldsymbol{K}\right) = 0$$

2) Lösen der charakteristischen Gleichung für die **Eigenfrequenzen** ω_k, $k = 1(1)f$:

$$\omega_1^2, \dots, \omega_f^2 \quad \rightarrow \quad \omega_1, \dots, \omega_f$$

3) Sukzessives Einsetzen der Eigenfrequenzen in das Eigenwertproblem zur Lösung des linearen Gleichungssysteme für die **Eigenvektoren** $\tilde{\boldsymbol{y}}_k$, $k = 1(1)f$:

$$\left(-\boldsymbol{M}\omega_k^2 + \boldsymbol{K}\right)\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_k$$

4) Superposition der Eigenlösungen:

$$\boldsymbol{y}(t) = \sum_{k=1}^{f} \tilde{\boldsymbol{y}}_k \cos(\omega_k t - \varphi_k)$$

5) Bestimmen der insgesamt $2f$ freien Konstanten (Unbestimmtheit der $\tilde{\boldsymbol{y}}_k$ sowie φ_k) aus den Anfangsbedingungen:

$$\boldsymbol{y}(0) = \boldsymbol{y}_0, \quad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \dot{\boldsymbol{y}}_0$$

<u>Anmerkung zu $\omega_k = 0$</u> : In diesem Fall ist die zugehörige Teillösung

$$\boldsymbol{y}_k(t) = (a + bt)\,\tilde{\boldsymbol{y}}_k\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

Beweis: Aus dem Eigenwertproblem $\left(-\boldsymbol{M}\,\omega_k^2 + \boldsymbol{K}\right)\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$ folgt mit $\omega_k = 0$

$$\boldsymbol{K}\,\tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}\ .$$

Außerdem findet man für obigen Lösungsansatz $\ddot{\boldsymbol{y}}_k = \boldsymbol{0}$.

Eingesetzt in die Bewegungsgleichung ergibt sich

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\boldsymbol{y}}_k + \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{y}_k \equiv \boldsymbol{K}\,\boldsymbol{y}_k = (a + bt)\,\boldsymbol{K}\,\tilde{\boldsymbol{y}}_k \equiv \boldsymbol{0} \quad \checkmark$$

3.3 Orthogonalität der Eigenvektoren

Orthogonalitätsbeziehungen

Die Eigenvektoren eines konservativen Schwingungssystems sind bezüglich der Massenmatrix und Steifigkeitsmatrix orthogonalisierbar:

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = 0 \ ,$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = 0 \ , \quad i \neq j \ .$$

Begründung:

- für $\omega_i \neq \omega_j$: $\omega_i^2 \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_i$

$$\longrightarrow \omega_i^2 \tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = \tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_i \qquad (1)$$

$$\xrightarrow{\text{transponiert, } i \to j} \omega_j^2 \tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = \tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_i \qquad (2)$$

(1)−(2): $\left(\omega_i^2 - \omega_j^2\right) \tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = 0$

$$\Downarrow$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = 0$$
$$\Downarrow (1)$$
$$\tilde{\boldsymbol{y}}_j^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_i = \omega_i^2 \cdot 0 = 0$$

- für $\omega_i = \omega_j$: zugehörige Eigenvektoren spannen eine Mannigfaltigkeit auf, in der sie frei und damit immer orthogonal zueinander wählbar sind

Normierung der Eigenvektoren

Die Eigenvektoren sind nur bis auf einen Faktor bestimmt. Für ein systematisches Vorgehen im Rahmen der Modalanalyse bieten sich folgende Normierungen an:

◇ massenorthogonal

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_k \stackrel{!}{=} 1$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_k = \omega_k^2 \ , \quad k = 1(1)f.$$

◇ steifigkeitsorthogonal

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_k \stackrel{!}{=} 1$$
$$\Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_k = \frac{1}{\omega_k^2} \ , \quad k = 1(1)f.$$