2 Diskrete Schwingungssysteme

Als diskrete Schwingungssysteme bezeichnet man Schwinger mit endlichem Freiheitsgrad. Das Aufstellen der Bewegungsgleichungen für solche Systeme lässt sich durch energetische Betrachtungen stark formalisieren. Interessiert man sich nur für das Bewegungsverhalten eines Massenpunktsystems, erweisen sich die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art als günstig. Die Bewegung wird dabei zunächst mit verallgemeinerten Koordinaten entsprechend dem Freiheitsgrad beschrieben. Die Trägheitskräfte des d'Alembert'schen Prinzips lassen sich dann auf die kinetische Energie und deren Ableitungen zurückführen, die eingeprägten Kräfte können zu verallgemeinerten Kräften zusammengeführt werden, die mit den einzelnen verallgemeinerten Koordinaten assoziiert sind. Es entstehen Vorschriften für das Aufstellen der Bewegungsgleichungen als Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Zahl dem Freiheitsgrad des Systems entspricht.

Bei konservativen Systemen kann auch der Einfluss der eingeprägten Kräfte mit Hilfe ihres Potentials auf eine energetische Betrachtung zurückgeführt werden. Durch Einführen der Lagrange-Funktion als Differenz zwischen kinetischer und potentieller Energie des Systems wird das weitere Vorgehen vereinheitlicht, es entsteht eine besondere Formulierung der Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art für konservative Systeme. Eine Erweiterung auf Mehrkörpersysteme erfolgt einfach durch zusätzliche Berücksichtigung der Rotationsenergie und dem Einfluss der eingeprägten Momente.

Die Lagrange'schen Gleichungen zweiter Art führen i. Allg. auf nichtlineare Differentialgleichungen, die nur in seltenen Fällen analytisch lösbar sind. Häufig interessiert man sich jedoch nur für kleine Auslenkungen aus einer Gleichgewichtslage. Diese lassen sich durch lineare Bewegungsgleichungen beschreiben, die man aus den nichtlinearen Gleichungen durch Linearisierung aller Terme um die Gleichgewichtslage gewinnt.

2.1 Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art

Voraussetzung: Beschreibung des Systems durch verallgemeinerte Koordinaten $\boldsymbol{y} = [\, y_1 \,,\, \dots \,,\, y_f \,]^T$ entsprechend dem Freiheitsgrad f des Systems in Form von $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{y})$.

Prinzip von d'Alembert:

$$\sum_k \left(m_k\, \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{F}_k^e\right)^T \delta \boldsymbol{r}_k = 0 \,.$$

$$\sum_k \left[\left(m_k\, \dot{\boldsymbol{v}}_k - \boldsymbol{F}_k^e\right)^T \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i}\, \delta y_i\right] = \sum_{i=1}^{f} \left[\sum_k m_k\, \dot{\boldsymbol{v}}_k^T \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i} - \sum_k \boldsymbol{F}_k^{e\,T} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i}\right] \delta y_i = 0$$

◇ $\boldsymbol{v}_k = \dfrac{d\boldsymbol{r}_k}{dt} = \displaystyle\sum_i \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i}\, \dot{y}_i \;\Rightarrow\; \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{y}_i} = \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i}$

◇ $\dfrac{\partial}{\partial y_i}\left(\boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k\right) = \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial y_i}^T \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{v}_k^T \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial y_i} = 2\, \boldsymbol{v}_k^T \dfrac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial y_i}$

◇
$$\begin{aligned}
m_k\, \dot{\boldsymbol{v}}_k^T \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i} &= \frac{d}{dt}\left[m_k\, \boldsymbol{v}_k^T \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i}\right] - m_k\, \boldsymbol{v}_k^T \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left[m_k\, \boldsymbol{v}_k^T \frac{\partial \boldsymbol{v}_k}{\partial \dot{y}_i}\right] - m_k\, \boldsymbol{v}_k^T \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{d\boldsymbol{r}_k}{dt}\right) \\
&= \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{y}_i}\left(\frac{1}{2}\, m_k\, \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k\right)\right] - \frac{\partial}{\partial y_i}\left(\frac{1}{2}\, m_k\, \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k\right) \\
&= \frac{d}{dt}\frac{\partial T_k}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T_k}{\partial y_i}
\end{aligned}$$

◇ $T = \displaystyle\sum_k T_k = \sum_k \frac{1}{2}\, m_k\, \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k = \sum_k \frac{1}{2}\, m_k\, v_k^2$ kinetische Energie

◇ $Q_i = \displaystyle\sum_k \boldsymbol{F}_k^{e\,T} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i}$ verallgemeinerte Kraft zum Freiheitsgrad y_i

$$\sum_{i=1}^{f} \left[\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T}{\partial y_i} - Q_i\right] \delta y_i = 0 \,.$$

Bewegungsgleichungen
(Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T}{\partial y_i} = Q_i \,, \quad i = 1(1)f$$

2.2 Konservative Schwingungssysteme

Kennzeichen: alle eingeprägten Kräfte haben ein Potential $U_k(\boldsymbol{r}_k)$ mit $\boldsymbol{F}_k^e = -\nabla U_k = -\dfrac{\partial U_k}{\partial \boldsymbol{r}_k}$

$$Q_i = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{e\,T} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i} = -\sum_k \frac{\partial U_k}{\partial \boldsymbol{r}_k}^T \frac{\partial \boldsymbol{r}_k}{\partial y_i} = -\sum_k \frac{\partial U_k}{\partial y_i} = -\frac{\partial}{\partial y_i} \sum_k U_k = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial T}{\partial y_i} = -\frac{\partial U}{\partial y_i}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial}{\partial y_i}(T - U) = 0$$

$L := T - U$ Lagrange−Funktion

Bewegungsgleichungen
(Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art für konservative Systeme)

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0\,, \quad i = 1(1)f$$

<u>Allgemeines Vorgehen zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen für konservative Mehrkörpersysteme</u>

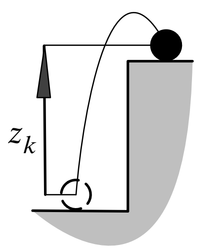
1) Beschreiben der Kinematik mit verallgemeinerten Koordinaten $y_1 \dots y_f$

2) Kinetische Energie des Gesamtsystems $T = \sum_k T_k$

   - Massenpunkt: $T_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \frac{1}{2} m_k \boldsymbol{v}_k^T \boldsymbol{v}_k$
   - Starrkörper: $T_k = \frac{1}{2} m_k \boldsymbol{v}_{Ck}^T \boldsymbol{v}_{Ck} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{I}_{Ck} \boldsymbol{\omega}_k$

3) Potentielle Energie des Gesamtsystems $U = \sum_k U_k$

   - Feder $U_k = \frac{1}{2} c_k s_k^2$
   - Gewichtskraft $U_k = m_k g z_k$



4) Lagrange−Funktion $L = T - U$

5) Differentiation $\dfrac{\partial L}{\partial y_i}$, $\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}\right)$

6) **Bewegungsgleichungen** $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \dfrac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \quad i = 1(1)f$

2.3 Lineare Bewegungsgleichungen konservativer Schwingungssysteme

Nichtlineare Bewegungsgleichungen

Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art für konservative Systeme

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0\ , \quad i = 1(1)f$$

$$\Downarrow$$

nichtlineare Bewegungsgleichungen

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y})\,\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{0}$$

Gleichgewichtslagen

Ansatz: $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_0 = const$

eingesetzt: $\boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}_0\,,\ \boldsymbol{0}) \overset{!}{=} \boldsymbol{0}$

Linearisierung der Bewegungsgleichungen um eine Gleichgewichtslage

Ansatz: $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}_0 + \bar{\boldsymbol{y}}(t)$ mit $|\bar{y}_i(t)| \ll 1$

eingesetzt: $\Downarrow$ Taylorreihenentwicklung aller nichtlinearen Funktionen mit folgenden typischen Vereinfachungen:

- ◇ $\bar{y}_i^2 \approx 0,\quad \bar{y}_i\,\bar{y}_j \approx 0$
- ◇ $\dot{\bar{y}}_i^2 \approx 0,\quad \dot{\bar{y}}_i\,\dot{\bar{y}}_j \approx 0,\quad \bar{y}_i\,\dot{\bar{y}}_j \approx 0,\quad \bar{y}_i\,\ddot{\bar{y}}_j \approx 0$
- ◇ $\sin\bar{y}_i \approx \bar{y}_i\ ,\quad \cos\bar{y}_i \approx 1$

Lineare Bewegungsgleichungen

$$\boldsymbol{M}\,\ddot{\bar{\boldsymbol{y}}}(t) + \boldsymbol{K}\,\bar{\boldsymbol{y}}(t) = \boldsymbol{h}(t)$$