1 Methoden der Analytischen Mechanik

Impuls- und Drallsatz genügen als Grundgleichungen der Mechanik, um die Bewegung von Mehrkörpersystemen zu berechnen. Allerdings enthalten sie neben den gesuchten Bewegungsgrößen und den gegebenen eingeprägten Kräften die beim Freischneiden entstehenden unbekannten Reaktionen, die problemspezifisch eliminiert werden müssen. Durch Einführen von virtuellen Verrückungen als unabhängige Bewegungsmöglichkeiten eines mechanischen Systems und durch Berücksichtigung der Eigenschaften idealer Bindungen, im Besonderen der Orthogonalität von Reaktionen und virtuellen Verrückungen, kann dieses Vorgehen systematisiert werden.

Aus der Orthogonalität folgt zunächst das Verschwinden der virtuellen Arbeit der Reaktionskräfte. Durch Einsetzen der aus der Statik bekannten Gleichgewichtsbedingungen folgt daraus das Prinzip der virtuellen Arbeit, das eine Berechnung der Gleichgewichtslage ohne Kenntnis der Reaktionen erlaubt. Damit entfällt auch ein explizites Freischneiden der Bindungen, da nur die (inneren und äußeren) **eingeprägten** Kräfte bekannt sein müssen.

In der Dynamik ergibt sich durch analoges Vorgehen das Prinzip von d'Alembert, dabei werden lediglich die Gleichgewichtsbedingungen durch die Impulssätze der freigeschnittenen Massenpunkte ersetzt. Bei Verwendung unabhängiger verallgemeinerter Koordinaten können daraus wegen der Unabhängigkeit der virtuellen Verrückungen direkt die Bewegungsgleichungen gewonnen werden.

1.1 Bisheriges Vorgehen in der Technischen Mechanik

Systematisches Aufstellen der Bewegungsgleichungen

gebundenes System

$\Downarrow$

Freischneiden

$\Downarrow$

Grundgleichungen: Impulssatz $m\,\boldsymbol{a}_{C_k} = \boldsymbol{F}^e_k + \boldsymbol{F}^r_k$

Drallsatz $\boldsymbol{I}_{C_k}\,\dot{\boldsymbol{\omega}}_k + \tilde{\boldsymbol{\omega}}\,\boldsymbol{I}_{C_k}\,\boldsymbol{\omega}_k = \boldsymbol{M}^e_{C_k} + \boldsymbol{M}^r_{C_k}$

$\Downarrow$

Bindungsbeziehungen
+ Elimination der Reaktionen

$\Downarrow$

Bewegungsgleichungen

1.2 Ideale Bindungen

Eigenschaften

◇ Bindungen reduzieren Bewegungsfreiheiten $f = f^u - n$

→ verallgemeinerte Koordinaten $\boldsymbol{y} = \left[y_1 , \ldots , y_f \right]^T$

- beschreiben System eindeutig: $\boldsymbol{r}_k = \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{y})$
- sind voneinander unabhängig

◇ Bindungen rufen Reaktionen hervor, die senkrecht auf den zugehörigen freien Bewegungsrichtungen stehen

Virtuelle Verrückungen

Virtuelle Verrückungen sind willkürliche, gedachte, mit den Bindungen verträgliche infinitesimale Lageänderungen des Systems bei festgehaltener Zeit ($\delta t = 0$).

unabhängige Variationen: $\delta y_1 , \ldots, \delta y_f$

verträgliche Lageänderungen: $\delta \boldsymbol{r}_k = \sum_{i=1}^{f} \frac{\partial \boldsymbol{r}_k(\boldsymbol{y})}{\partial y_i} \delta y_i$

Rechenregeln: $\delta(c\boldsymbol{r}) = c\, \delta \boldsymbol{r}$

$\delta(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2) = \delta \boldsymbol{r}_1 + \delta \boldsymbol{r}_2$

Virtuelle Arbeit der Reaktionskräfte

Das Skalarprodukt aus einer Kraft $\boldsymbol{F}_k$ und der virtuellen Lageänderung $\boldsymbol{r}_k$ bezeichnet man in Anlehnung an den Arbeitsbegriff als virtuelle Arbeit $\delta W_k = \boldsymbol{F}_k^T \delta \boldsymbol{r}_k$. Die Orthogonalität von Reaktionskräften und zugehörigen freien Bewegungsmöglichkeiten lässt sich dann wie folgt formulieren:

Reaktionskräfte leisten keine virtuelle Arbeit, d.h.

$$\delta W^r = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{rT} \delta \boldsymbol{r}_k = 0 \ .$$

1.3 Prinzipe der Mechanik

Statik

Grundgleichungen: Gleichgewichtsbedingungen $\boldsymbol{F}_k^r + \boldsymbol{F}_k^e = \boldsymbol{0}$

virtuelle Arbeit der Reaktionen $\delta W^r = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{rT} \delta \boldsymbol{r}_k = 0$

⇩

Prinzip der virtuellen Arbeit:

Ein Massenpunktsystem befindet sich im Gleichgewicht, genau dann wenn die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte bei einer virtuellen Verrückung aus der Gleichgewichtslage verschwindet:

$$\delta W^e = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{e\,T} \delta \boldsymbol{r}_k = 0\ .$$

Dynamik

Grundgleichungen: Impulssatz $m_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{F}_k^r + \boldsymbol{F}_k^e$

virtuelle Arbeit der Reaktionen $\delta W^r = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{rT} \delta \boldsymbol{r}_k = 0$

⇩

Prinzip von d'Alembert:

Die Bewegung eines Massenpunktsystems genügt der Variationsgleichung

$$\sum_k \left(m_k \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{F}_k^e\right)^T \delta \boldsymbol{r}_k = 0\ .$$