



Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

D. Bestle

Technische Mechanik III

Schwingungen und Hydromechanik

Arbeitsunterlagen zur Vorlesung



Lehrstuhl
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle

Inhalt

Inhalt	1
Literatur	3
1 Methoden der Analytischen Mechanik	5
1.1 Bisheriges Vorgehen in der Technischen Mechanik	6
1.2 Ideale Bindungen	7
1.3 Prinzipie der Mechanik	9
2 Diskrete Schwingungssysteme	11
2.1 Lagrange'sche Gleichungen zweiter Art	12
2.2 Konservative Schwingungssysteme	14
2.3 Lineare Bewegungsgleichungen konservativer Schwingungssysteme ..	15
3 Freie Koppelschwingungen konservativer Schwingungssysteme	17
3.1 Eigenschwingungen	18
3.2 Freie Schwingungen	20
3.3 Orthogonalität der Eigenvektoren	22
4 Erzwungene Schwingungen konservativer Schwingungssysteme	23
4.1 Modaltransformation der homogenen Bewegungsgleichung	24
4.2 Modaltransformation der inhomogenen Bewegungsgleichung	26
4.3 Harmonische Erregung	28
5 Kontinuierliche Schwingungssysteme	31
5.1 Transversalschwingungen einer Saite	32
5.2 Longitudinalschwingungen eines Stabes	34
5.3 Torsionsschwingungen eines Rundstabes	35
5.4 Biegeschwingungen eines Balkens	36
6 Eigenlösungen der eindimensionalen Wellengleichung	39
6.1 Eigenlösungen	40
6.2 Orthogonalität der Eigenfunktionen	43
6.3 Eigenschwingungen	44
7 Eigenschwingungen des Balkens	45
7.1 Eigenlösungen	46
7.2 Orthogonalität der Eigenfunktionen	49
7.3 Eigenschwingungen	50
8 Freie Schwingungen kontinuierlicher Systeme	51
8.1 Superposition der Eigenlösungen	52
8.2 Matrizendarstellung	55

9	Erzwungene Schwingungen durch verteilte Kräfte	57
9.1	Kontinuierliche Systeme mit verteilten Kräften	58
9.2	Erzwungene Schwingungen der eindimensionalen Wellengleichung	59
9.3	Erzwungene Schwingungen des Balkens	61
10	Erzwungene Schwingungen durch inhomogene Randbedingungen	63
10.1	Eindimensionale Wellengleichung	64
10.2	Balkenbiegung	66
10.3	Zusammenfassung und Anmerkungen	68
11	Wellenausbreitung in eindimensionalen Kontinua	71
11.1	D'Alembert'sche Lösung der eindimensionalen Wellengleichung	72
11.2	Einfluss von Anfangs- und Randbedingungen	74
11.3	Wellenausbreitung im Balken	76
12	Fluidstatik	79
12.1	Fluideigenschaften	80
12.2	Statischer Druck	82
13	Kräfte auf Behälterwände	85
13.1	Resultierender Kraftwinder	86
13.2	Ebene Behälterwände	87
13.3	Gekrümmte Flächen	89
14	Auftrieb und Schwimmstabilität	91
14.1	Vollständig eingetauchte Körper	92
14.2	Schwimmende Körper	93
15	Eindimensionale Strömungen	97
15.1	Beschreibung von Strömungen	98
15.2	Strömungsgeschwindigkeit	99
15.3	Strömungskräfte	101

Literatur

1. H. Dubbel: *Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer, 2014.
2. Gross, Hauger, Schröder, Wall: *Technische Mechanik 1 – Statik*. Springer, 2016.
3. Gross, Hauger, Schröder, Wall: *Technische Mechanik 2 – Elastostatik*. Springer, 2014.
4. Gross, Hauger, Schröder, Wall: *Technische Mechanik 3 – Kinetik*. Springer, 2015.
5. Gross, Hauger, Wriggers: *Technische Mechanik 4 – Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer, 2014.
6. P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 1 – Statik*. Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2006.
7. P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 2 – Festigkeitslehre*. Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2006.
8. P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 3 – Dynamik*. Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2008.
9. R. C. Hibbeler: *Technische Mechanik 3 – Dynamik*. München: Pearson Deutschland, 2012.
10. K. Magnus und H.H. Müller–Slany: *Grundlagen der Technischen Mechanik*. Springer, 2005.
11. W. Nachtigall: *Biomechanik*. Springer Vieweg, 2001.
12. Elger, Williams, Crowe, Roberson: *Engineering Fluid Mechanics*. New York: Wiley & Sons, 2012.

Sachwortverzeichnis

A

Amplitude, 53
Amplitudengang, 30
Anfangsbedingung, 33 , 34 , 35 , 37
 modale, 55 , 60 , 62
Anfangswertproblem
 diskreter Systeme, 20
 kontinuierlicher Systeme, 52
Archimedisches Prinzip, 92
Auftrieb, 91 , **92** , 93

B

Bahnlinie, 98
Balken, **36** , 66 , 76
Behälterwand, 85
 eben, 87
 gekrümmt, 89
 horizontal, 87
 vertikal, 88
Bernoulli'sche Gleichung, 100
Bernoulli'sche Lösung, 39
Bewegungsgleichung
 der Saite, 32 , 58
 des Balkens, 36 , 58
 des Dehnstabs, 34 , 58
 des Torsionsstabs, 35 , 58
 diskreter Systeme, 6 , 13
 Euler'sche. *Siehe* Euler'sche Bewegungsgleichung
 konservativer Systeme, 14
 lineare, 15 , 26
Biegeschwingung. *Siehe* Balken
Bindung, 7

C

charakteristische Gleichung
 diskreter Systeme, 18
 kontinuierlicher Systeme, 41 , 47

D

d'Alembert'sche Lösung, 71 , **72**

Dehnstab, 34
Dichte, 79 , **81**
Differentialgleichung
 gewöhnliche, 44 , 50
 partielle, 31 , 44 , 50
Dispersion, 71
Drallsatz, 6
Druck, 79 , 80 , **82**
 hydrostatischer, 84
Druckpunkt, 85 , 88

E

Eigenform, 41 , 48 , 68
Eigenfrequenz, 17 , 20 , 39 , 41 , 44 , 48 , 50 , 68
Eigenlösung, 68
 der Wellengleichung, 40
 des Balkens, 46
 konservativer Systeme, 18
Eigenschwingung
 der Wellengleichung, 44
 des Balkens, 45 , 50
 diskreter Systeme, 17 , **18**
Eigenvektor, 17 , 19 , 20
Eigenwertproblem, 17 , 18
Energie
 kinetische , 12 , **14**
 potentielle, 14
Erregung, harmonische, 28
Erstarrungsprinzip, 81 , 90
erzwungene Schwingung, 57 , 69
 des Balkens, 61
 diskreter Systeme, 23
 Wellengleichung, 59
Euler'sche Beschreibung, 97 , **98**
Euler'sche Bewegungsgleichung, 99

F

Fluid, 79
 inkompressibles, 81
 Newton'sches, 79 , 80
 reibungsfreies, 80
Fluidstatik, 79
freie Schwingung
 diskreter Systeme, 20



kontinuierlicher Systeme, 51 , 68

G

Gleichgewicht, 9 , 15 , 92

I

Impulssatz, 6 , 99

inhomogene Randbedingung, 69

K

Kippstabilität
Schwimmen, 94
Tauchen, 92

Kontinuitätsgleichung, 99

Koppelschwingung, 17

Kraftwinder, 85 , **86** , 86

L

Lagrange'sche Beschreibung, 97 , **98**

Lagrange'sche Gleichungen, 11 , **12**

Lagrange–Funktion, 11 , **14**

Linearisierung, 11 , **15**

Lösung
homogene, 23
inhomogene, 23

M

massenorthogonal, 17 , 22

massenspezifische Volumenkraft, 79 , **82**

Metazenterhöhe, 96

Metazentrum, 91 , **96**

modale Entkopplung, 26

Modalmatrix, 24

Modaltransformation, 25 , 26 , 55 , 59 , 61

Mode. *Siehe* Eigenschwingung

N

Normalenvektor, 86

O

Orthogonalität
der Eigenfunktionen, **43** , **49** , 52 , 55
der Reaktionen, 5
der Eigenvektoren, 22

P

Partikulärlösung, 23 , 28 , 29

Phase, 53

Potential, 14

Prinzip
der virtuellen Arbeit, 9
von d'Alembert, 5 , **9**

Produktansatz, 39 , 40 , 46

R

Randbedingung
der Saite, 33
des Balkens, 37
des Dehnstabs, 34
des Torsionsstabs, 35
inhomogene, 63

Reflexion, 75

Resonanz, 23 , 57

Rundstab, 35

S

Saite, **32** , 39

Schergeschwindigkeit, 80

Scherzähigkeit. *Siehe* Viskosität

Schnittprinzip, 81 , 90

Schubspannung, 79 , 80

Schwebegleichgewicht, 92

Schwimmen, 93

Schwimmstabilität. *Siehe* Kippstabilität

Schwingung
erzwungene. *Siehe* Erzwungene Schwingung
freie. *Siehe* Freie Schwingung

Schwingungseigenform. *Siehe* Eigenschwingung

Schwingungssystem
diskretes, 11
konservatives, 11 , **14** , 17 , 23
kontinuierliches, 31

steifigkeitsorthogonal, 22

Stromlinie, 98 , 99
Stromröhre, 97 , 99
Strömung, 97
 laminar, 80
 turbulent, 80
Strömungskraft, 101
Superposition
 der Eigenlösungen, 20 , 52
 der inhomogenen Lösung, 26 , 65 , 67
 der modalen Lösungen, 27 , 28
Superpositionsprinzip, 20 , 52

T

Tilgung, 23
Torsionsstab. *Siehe* Rundstab

V

verallgemeinerte Koordinaten, 7
verallgemeinerte Kraft, 12
virtuelle Arbeit, 8
virtuelle Verrückung, 5 , 7
Viskosität
 dynamische, 79 , 80
 kinematische, 80

W

Wellenausbreitung, 71
Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit, 39
Wellengleichung, 39 , 58 , 64 , 72

Prinzip der virtuellen Arbeit $\delta W^e = \sum_k \mathbf{F}_k^{eT} \delta \mathbf{r}_k = 0$
 von d'Alembert $\sum_k (m_k \mathbf{a}_k - \mathbf{F}_k^e)^T \delta \mathbf{r}_k = 0$

Langrange'sche Gleichungen zweiter Art (konservative Systeme)

Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0, \quad i = 1(1)f$
 mit kinetische Energie $T = \sum_k T_k,$
 $T_k = \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_{Ck}^T \mathbf{v}_{Ck} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_k^T \mathbf{I}_{Ck} \boldsymbol{\omega}_k$
 potentielle Energie $U = \sum_k U_k$
 $U_k = \frac{1}{2} c s^2$ (Feder),
 $U_k = m g z$ (Gewicht)
 Lagrange-Funktion $L := T - U$

Bewegungsgleichungen nichtlinear $\mathbf{M}(\mathbf{y}) \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{k}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$
 linear $\mathbf{M} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{K} \mathbf{y} = \mathbf{h}(t)$

Eigenwertproblem

charakteristische Gleichung $(-\mathbf{M} \omega^2 + \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$
 Eigenfrequenzen $\det(-\mathbf{M} \omega^2 + \mathbf{K}) = 0$
 Eigenvektoren $\omega_k, k = 1(1)f$
 $(-\mathbf{M} \omega_k^2 + \mathbf{K}) \tilde{\mathbf{y}} = \mathbf{0} \rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_k, k = 1(1)f$
 $\tilde{\mathbf{y}}_k^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}}_k \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_k^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{y}}_k = \omega_k^2$
 $\tilde{\mathbf{y}}_k^T \mathbf{K} \tilde{\mathbf{y}}_k \stackrel{!}{=} 1 \Rightarrow \tilde{\mathbf{y}}_k^T \mathbf{M} \tilde{\mathbf{y}}_k = 1/\omega_k^2$

Modaltransformation (massenorth. EV)

homogen $\mathbf{y} = \mathbf{Y} \hat{\mathbf{y}}, \mathbf{Y} := [\tilde{\mathbf{y}}_1 \ \tilde{\mathbf{y}}_2 \ \dots \ \tilde{\mathbf{y}}_f], \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{Y} = \mathbf{E}$
 $\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$
 inhomogen $\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \hat{\mathbf{y}} = \hat{\mathbf{h}}(t), \hat{\mathbf{h}} = \mathbf{Y}^T \mathbf{h}$
 Anfangsbedingungen $\hat{\mathbf{y}}(0) = \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \mathbf{y}_0, \dot{\hat{\mathbf{y}}}(0) = \mathbf{Y}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{y}}_0$

Lösung

homogen $y_h(t) = \sum_{k=1}^f a_k \tilde{\mathbf{y}}_k \cos(\omega_k t - \varphi_k)$
 partikulär f. harm. Erregung $y_p(t) = (-\mathbf{M} \Omega^2 + \mathbf{K})^{-1} \mathbf{h}_0 \cos \Omega t$

Kontinuierliche Systeme

Randwertproblem Wellengl. $\ddot{w} = c^2 w'' + q(x, t)$ + hom. RB für w, w'
 Saite $c = \sqrt{\sigma/\rho}$
 Längsschwingung $c = \sqrt{E/\rho}$
 Torsion $c = \sqrt{G/\rho}$
 Balken $\ddot{w} + (EI/\rho A) w^{IV} = q(x, t)$
 + hom.RB für w, w', w'', w'''
 Anfangsbedingungen $w(x, 0) = w_0(x), \dot{w}(x, 0) = \dot{w}_0(x)$

inh. RB \rightarrow hom. RB $w = w_H + w_R$, w_R erfüllt RB

Wellengl. $\ddot{w}_H = c^2 w_H'' + q(x,t)$, $q = c^2 w_R'' - \ddot{w}_R$

Balken $\ddot{w}_H + \frac{EI}{QA} w_H^{IV} = q(x,t)$

$$q = - \left(\ddot{w}_R + \frac{EI}{QA} w_R^{IV} \right)$$

Eigenwertproblem

Ortsdgl. Wellengl. $W'''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W(x) = 0$ + RB

Balken $W^{IV}(x) - \gamma^4 W(x) = 0$, $\gamma^4 := \omega^2 \frac{QA}{EI}$ + RB

Eigenfrequenzen $\omega_k, k = 1(1)\infty$

Eigenformen $W_k(x)$ mit $\int_0^L W_i(x) W_j(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ 1 & \text{für } i = j \end{cases}$

Modaltransformation

homogene Dgl., hom. RB $w(x,t) = \mathbf{W}^T(x) \mathbf{y}(t)$, $\mathbf{W}^T := [W_1(x) \dots W_n(x)]$

$$\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

inhom. Dgl., hom. RB $\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Omega}^2 \mathbf{y} = \mathbf{h}(t)$, $\mathbf{h}(t) = \int_0^L \mathbf{W}(x) q(x,t) dx$

Anfangsbedingungen $\mathbf{y}(0) = \int_0^L \mathbf{W} w_0(x) dx$, $\dot{\mathbf{y}}(0) = \int_0^L \mathbf{W} \dot{w}_0(x) dx$

Wellenausbreitung

$$w(x,t) = f_1(x - ct) + f_2(x + ct) = \frac{1}{2} \left[w_0(x - ct) + w_0(x + ct) + \frac{1}{c} \int_{x-ct}^{x+ct} \dot{w}_0(\bar{x}) d\bar{x} \right]$$

speziell: verschw. Geschw. $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2} w_0(x)$

Fluidstatik

Druck allgemein $grad p = \rho \mathbf{f}$

im Schwerfeld $p = p_0 + \rho g z$

Wandkraft horizontal $F = \Delta p A = \rho g h A$

vertikal $F = \rho g z_C A$, $y_D = -\frac{I_{yz}}{z_C A}$, $z_D = z_C + \frac{I_{Cy}}{z_C A}$

gekrümmt $\mathbf{F} = [\rho g z_c A_v \quad 0 \quad \pm \rho g V]^T$

Schwimmen

Auftriebskraft $F_A = \rho g V$

Metazenterhöhe $h_M = I_x/V - s$

Strömung (stationär, inkompressibel)

Kontinuitätsgleichung $A_1 v_1 = A_2 v_2$

Bernoulli-Gleichung $\rho \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \rho g h_2 = \rho \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \rho g h_1$

Toricelli'sche Ausflussformel $v = \sqrt{2gH}$

dynamische Kraft $\mathbf{F} = \dot{m} (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$, $\dot{m} = \rho A_1 v_1 \equiv \rho A_2 v_2$



Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

D. Bestle

Technische Mechanik III

Schwingungen und Hydromechanik

Übungen zur Vorlesung



Lehrstuhl
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik
Prof. Dr.-Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle