Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

D. Bestle

Technische Mechanik III

Schwingungen und Hydromechanik

Arbeitsunterlagen zur Vorlesung

Lehrstuhl
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik
Prof. Dr.–Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle

Inhalt

Literatur

1. H. Dubbel: *Taschenbuch für den Maschinenbau*.
   Springer, 2014.

2. Gross, Hauger, Schröder, Wall: *Technische Mechanik 1 – Statik.*
   Springer, 2016.

3. Gross, Hauger, Schröder, Wall: *Technische Mechanik 2 – Elastostatik.*
   Springer, 2014.

4. Gross, Hauger, Schröder, Wall: *Technische Mechanik 3 – Kinetik.*
   Springer, 2015.

5. Gross, Hauger, Wriggers: *Technische Mechanik 4 – Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden.*
   Springer, 2014.

6 P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 1 – Statik.*
Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2006.

7 P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 2 – Festigkeitslehre.*
Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2006.

8 P. Hagedorn: *Technische Mechanik, Band 3 – Dynamik.*
Frankfurt a. M.: Verlag Harri Deutsch, 2008.

9 R. C. Hibbeler: *Technische Mechanik 3 – Dynamik.*
München: Pearson Deutschland, 2012.

10 K. Magnus und H.H. Müller–Slany: *Grundlagen der Technischen Mechanik.*
Springer, 2005.

11. W. Nachtigall: *Biomechanik.*
    Springer Vieweg, 2001.

12. Elger, Williams, Crowe, Roberson: *Engineering Fluid Mechanics.*
    New York: Wiley & Sons, 2012.

Sachwortverzeichnis

Prinzip der virtuellen Arbeit $\delta W^e = \sum_k \boldsymbol{F}_k^{e\,T} \delta \boldsymbol{r}_k = 0$

von d'Alembert $\sum_k \left(m_k \, \boldsymbol{a}_k - \boldsymbol{F}_k^e \right)^T \delta \boldsymbol{r}_k = 0$

Langrange'sche Gleichungen zweiter Art (konservative Systeme)

Bewegungsgleichungen $\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial L}{\partial y_i} = 0 \,, \quad i = 1(1)f$

mit kinetische Energie $T = \sum_k T_k \,,$

$T_k = \frac{1}{2} m_k \, \boldsymbol{v}_{C_k}^T \boldsymbol{v}_{C_k} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_k^T \boldsymbol{I}_{C_k} \boldsymbol{\omega}_k$

potentielle Energie $U = \sum_k U_k$

$U_k = \frac{1}{2} c \, s^2$ (Feder),

$U_k = m \, g \, z$ (Gewicht)

Lagrange–Funktion $L := T - U$

Bewegungsgleichungen nichtlinear $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{y}) \, \ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}) = \boldsymbol{0}$

linear $\boldsymbol{M} \, \ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{K} \, \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t)$

Eigenwertproblem $\left(- \boldsymbol{M} \, \omega^2 + \boldsymbol{K} \right) \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$

charakteristische Gleichung $\det\left(- \boldsymbol{M} \, \omega^2 + \boldsymbol{K} \right) = 0$

Eigenfrequenzen $\omega_k \,, \; k = 1(1)f$

Eigenvektoren $(- \boldsymbol{M} \, \omega_k^2 + \boldsymbol{K}) \, \tilde{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0} \quad \rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_k \,, \; k = 1(1)f$

◇ massenorthogonal $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{M} \, \tilde{\boldsymbol{y}}_k \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{K} \, \tilde{\boldsymbol{y}}_k = \omega_k^2$

◇ steifigkeitsorthogonal $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{K} \, \tilde{\boldsymbol{y}}_k \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{M} \, \tilde{\boldsymbol{y}}_k = 1/\omega_k^2$

Modaltransformation (massenorth. EV) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Y} \hat{\boldsymbol{y}} \,, \;\; \boldsymbol{Y} := \left[\tilde{\boldsymbol{y}}_1 \;\; \tilde{\boldsymbol{y}}_2 \;\; \dots \;\; \tilde{\boldsymbol{y}}_f \right], \;\; \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{M} \, \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{E}$

homogen $\ddot{\hat{\boldsymbol{y}}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \, \hat{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{0}$

inhomogen $\ddot{\hat{\boldsymbol{y}}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \, \hat{\boldsymbol{y}} = \hat{\boldsymbol{h}}(t), \;\; \hat{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{h}$

Anfangsbedingungen $\hat{\boldsymbol{y}}(0) = \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{M} \, \boldsymbol{y}_0 \,, \; \dot{\hat{\boldsymbol{y}}}(0) = \boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{M} \, \dot{\boldsymbol{y}}_0$

Lösung

homogen $\boldsymbol{y}_h(t) = \sum_{k=1}^{f} a_k \, \tilde{\boldsymbol{y}}_k \cos\left(\omega_k t - \varphi_k \right)$

partikulär f. harm. Erregung $\boldsymbol{y}_p(t) = \left(- \boldsymbol{M} \, \Omega^2 + \boldsymbol{K} \right)^{-1} \boldsymbol{h}_0 \, \cos \Omega t$

Kontinuierliche Systeme

Randwertproblem Wellengl. $\ddot{w} = c^2 \, w'' + q(x,t)$ + hom. RB für w, w'

Saite $c = \sqrt{\sigma / \varrho}$

Längsschwingung $c = \sqrt{E / \varrho}$

Torsion $c = \sqrt{G / \varrho}$

Balken $\ddot{w} + (EI / \varrho A) \, w^{IV} = q(x,t)$

+ hom.RB für w, w', w'', w'''

Anfangsbedingungen $w(x,0) = w_0(x), \;\; \dot{w}(x,0) = \dot{w}_0(x)$

inh. RB → hom. RB $w = w_H + w_R$, w_R erfüllt RB

Wellengl. $\ddot{w}_H = c^2 w''_H + q(x,t),\ q = c^2 w''_R - \ddot{w}_R$

Balken $\ddot{w}_H + \frac{EI}{\varrho A} w_H^{IV} = q(x,t)$

$$q = -\left(\ddot{w}_R + \frac{EI}{\varrho A} w_R^{IV}\right)$$

Eigenwertproblem

Ortsdgl. Wellengl. $W''(x) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 W(x) = 0$ + RB

Balken $W^{IV}(x) - \gamma^4 W(x) = 0,\ \gamma^4 := \omega^2 \frac{\varrho A}{EI}$ + RB

Eigenfrequenzen $\omega_k,\ k = 1(1)\infty$

Eigenformen $W_k(x)$ mit $\int_0^L W_i(x)\, W_j(x)\, dx = \begin{cases} 0 & für\ i \neq j \\ 1 & für\ i = j \end{cases}$

Modaltransformation $w(x,t) = \boldsymbol{W}^T(x)\,\boldsymbol{y}(t),\ \boldsymbol{W}^T := \left[W_1(x) \ldots W_n(x)\right]$

homogene Dgl., hom. RB $\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$

inhom. Dgl., hom. RB $\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\Omega}^2 \boldsymbol{y} = \boldsymbol{h}(t),\ \boldsymbol{h}(t) = \int_0^L \boldsymbol{W}(x)\, q(x,t)\, dx$

Anfangsbedingungen $\boldsymbol{y}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W} w_0(x)\, dx,\ \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \int_0^L \boldsymbol{W} \dot{w}_0(x)\, dx$

Wellenausbreitung

$$w(x,t) = f_1(x - c\,t) + f_2(x + c\,t) = \frac{1}{2}\left[w_0(x - c\,t) + w_0(x + c\,t) + \frac{1}{c}\int_{x-c\,t}^{x+c\,t} \dot{w}_0(\bar{x})\, d\bar{x}\right]$$

speziell: verschw. Geschw. $f_1(x) = f_2(x) = \frac{1}{2} w_0(x)$

Fluidstatik

Druck allgemein $grad\ p = \varrho \boldsymbol{f}$

im Schwerefeld $p = p_0 + \varrho g z$

Wandkraft horizontal $F = \Delta p\, A = \varrho g h A$

vertikal $F = \varrho g z_C A,\ y_D = -\frac{I_{yz}}{z_C A},\ z_D = z_C + \frac{I_{Cy}}{z_C A}$

gekrümmt $\boldsymbol{F} = [\varrho g z_c A_v \quad 0 \quad \pm \varrho g V]^T$

Schwimmen

Auftriebskraft $F_A = \varrho g V$

Metazenterhöhe $h_M = I_x/V - s$

Strömung (stationär, inkompressibel)

Kontinuitätsgleichung $A_1 v_1 = A_2 v_2$

Bernoulli-Gleichung $\varrho \frac{v_2^2}{2} + p_2 + \varrho g h_2 = \varrho \frac{v_1^2}{2} + p_1 + \varrho g h_1$

Toricelli'sche Ausflussformel $v = \sqrt{2gH}$

dynamische Kraft $\boldsymbol{F} = \dot{m}\left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right),\ \dot{m} = \varrho A_1 v_1 \equiv \varrho A_2 v_2$

Brandenburgische
Technische Universität
Cottbus - Senftenberg

D. Bestle

Technische Mechanik III

Schwingungen und Hydromechanik

Übungen zur Vorlesung

Lehrstuhl
Technische Mechanik und Fahrzeugdynamik
Prof. Dr.–Ing. habil. Hon. Prof. (NUST) D. Bestle