Prüfungsklausur Technische Mechanik III

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

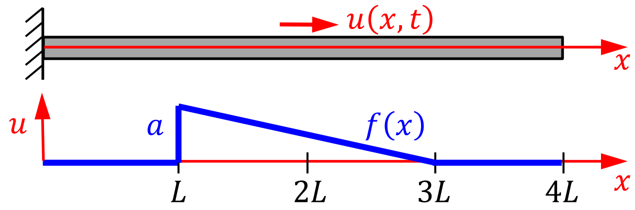
....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Ein Stab (Länge $4L$, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c) ist linksseitig fest eingespannt. Das Bild zeigt die Halbwelle $f(x+ct)$ einer Längsschwingung $u(x,t)$ zum Zeitpunkt $t=0$.



a) In welche Richtung läuft die Halbwelle $f(x+ct)$ zunächst?

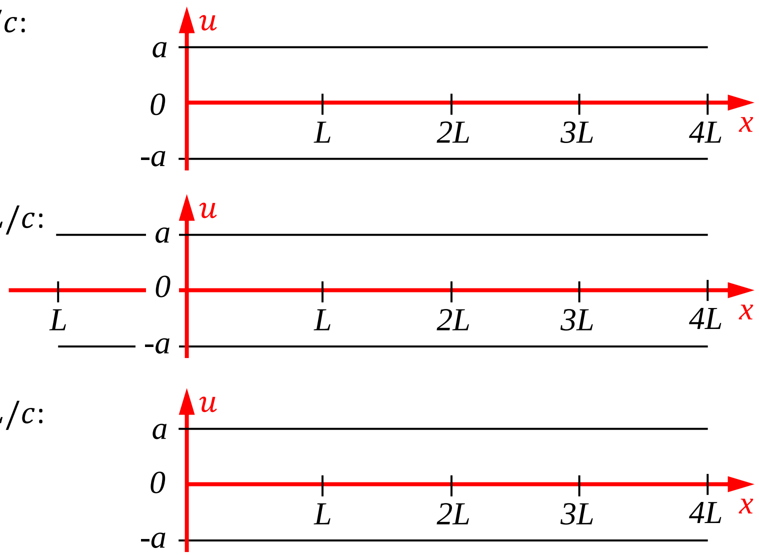
☐ *nach links* ☐ *nach rechts* ☐ *bleibt stehen*

b) Zeichnen Sie die Halbwelle für die Zeitpunkte $t_k = kL/c$ für $k = 1 \ldots 3$. Zeigen Sie für den Fall $k=2$ zusätzlich die Konstruktion der Reflexion mit verschiedenen Farben für die Teilkomponenten.

$t = L/c$:

$t = 2L/c$:

$t = 3L/c$:

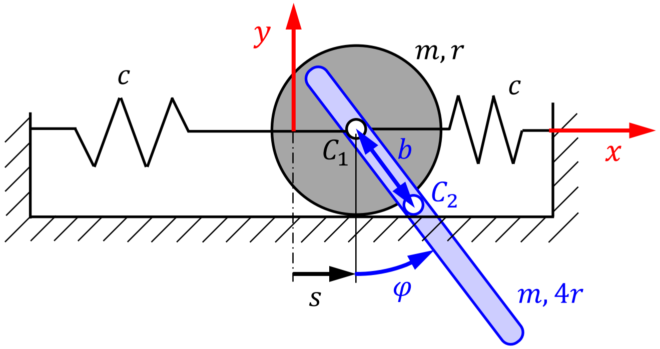


c) Welche Art der Spiegelung findet für $k=2$ statt?

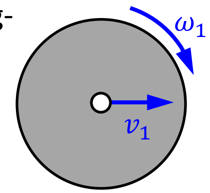
☐ *Punktspiegelung* ☐ *Achsenspiegelung*

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Eine homogene zylindrische Walze (Masse m, Radius r) rollt auf einer Unterlage und ist über zwei Federn (jeweils Steifigkeit c) mit der Umgebung verbunden. In ihrem Schwerpunkt C_1 ist ein homogener Stab (Masse m, Länge $4r$, Schwerpunktabstand b) frei drehbar gelagert. Die Federn sind für $s = 0$ entspannt.



a) Wie groß sind Schwerpunkt- und Winkelgeschwindigkeit der Walze?



$v_1 =$ ______ , $\omega_1 =$ ______

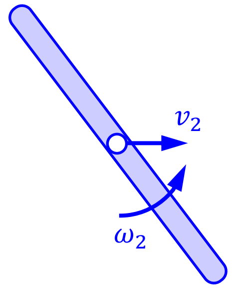
b) Wie groß sind translatorischer und rotatorischer Anteil der kinetischen Energie der Walze?

$T_1 = \underbrace{}_{translatorisch} + \underbrace{}_{rotatorisch}$

c) Beschreiben Sie die Lage $\vec{r}_2$ des Stabschwerpunkts C_2 im inertialen xyz-Koordinatensystem und bestimmen Sie dessen Absolutgeschwindigkeit $\vec{v}_2$.

$$\boldsymbol{r}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{v}_2 = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

d) Wie groß sind Schwerpunkt- und Winkelgeschwindigkeit des Stabes?



$v_2 =$ ______

$\omega_2 =$ ______

e) Wie groß sind translatorischer und rotatorischer Anteil der kinetischen Energie des Stabes?

$T_2 = \underbrace{}_{translatorisch} + \underbrace{}_{rotatorisch}$

f) Wie groß ist die potenzielle Energie des Gesamtsystems?

$U =$ ______

g) Wie lautet die Lagrange Funktion?

☐ $L = \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + mb\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi + m\dot{\varphi}^2\left(\frac{b^2}{2} + \frac{2}{3}r^2\right) - cs^2$

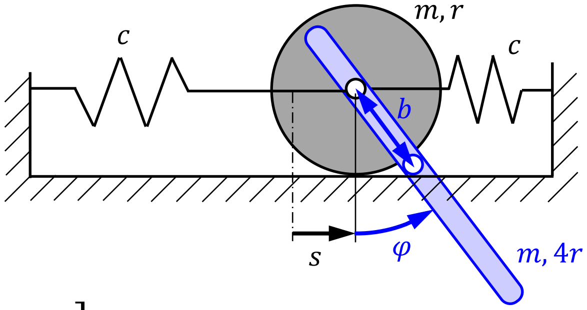
☐ $L = \frac{5}{4}m\dot{s}^2 + mb\dot{s}\dot{\varphi}\cos\varphi + m\dot{\varphi}^2\left(\frac{b^2}{2} + \frac{2}{3}r^2\right) + cs^2$

☐ $L = \frac{5}{4}m\dot{s}^2 + mb(\dot{s}\dot{\varphi} + g)\cos\varphi + m\dot{\varphi}^2\left(\frac{b^2}{2} + \frac{2}{3}r^2\right) - cs^2$

☐ $L = \frac{3}{4}m\dot{s}^2 + mb(\dot{s}\dot{\varphi} + g)\cos\varphi + m\dot{\varphi}^2\frac{b^2}{2} + cs^2$

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Für das System in Aufgabe 2 (rollende Walze mit Stab) findet man die nichtlineare Bewegungsgleichung



$$\begin{bmatrix} \frac{5}{2}m & mb\cos\varphi \\ mb\cos\varphi & m\left(b^2+\frac{4}{3}r^2\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -mb\dot{\varphi}^2\sin\varphi + 2cs \\ mgb\sin\varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

a) Wie lauten die Bedingungen für Gleichgewichtslagen und die zugehörigen Lösungen?

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \rightarrow s = \_\_\_\_\_ \,, \ \varphi = \_\_\_\_\_\_\_$$

b) Linearisieren Sie folgende Terme für $\varphi \ll 1$:

$\sin\varphi \approx$ _____ , $\cos\varphi \approx$ _____ , $\dot{\varphi}^2 \approx$ _____

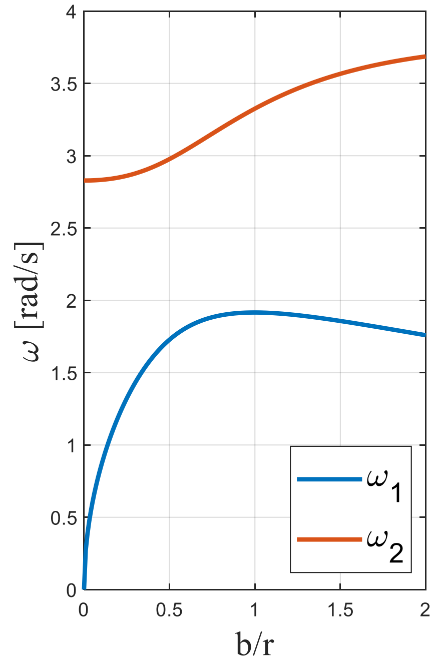
c) Linearisieren Sie die Bewegungsgleichung für $\varphi \ll 1$.

$$\begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{s} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

d) Wie bestimmt sich die zugehörige charakteristische Gleichung?

$$\det \begin{bmatrix} \end{bmatrix} = 0$$

e) Das Diagramm zeigt die daraus folgenden Eigenfrequenzen für ausgewählte Parameterwerte. Wie groß sind diese für $b = r$ und wie groß sind die zugehörigen Schwingungsfrequenzen?



$\omega_1 =$ _________

$\omega_2 =$ _________

$f_1 =$ ______ Hz

$f_2 =$ ______ Hz

f) Für $b = 0$ ergibt sich der zu ω_1 gehörige Eigenvektor als $\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = [0 \quad 1]^T$. Beschreiben Sie verbal die zugehörige Eigenschwingung.

____

____

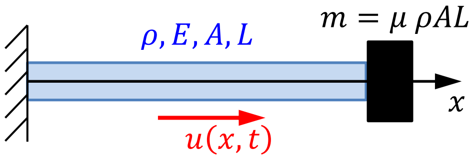
g) Für $b = 0$ gehört zu ω_2 der Eigenvektor $\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = [1 \quad 0]^T$. Beschreiben Sie verbal die zugehörige Eigenschwingung.

____

____

Aufgabe 4 (17 Punkte)

Ein Stab (Querschnittsfläche A, Länge L, Dichte ρ, Elastizitätsmodul E) ist am linken Ende fest eingespannt und trägt am rechten Ende eine Endmasse $m = \mu\,\rho AL$ mit dem Faktor $\mu \geq 0$.



a) Welche Bedeutung hat der Faktor μ?

☐ *Längenverhältnis von Endmasse zu Stabmasse*

☐ *Volumenverhältnis von Endmasse zu Stabmasse*

☐ *Massenverhältnis Endmasse zu Stabmasse*

b) Durch welche Gleichungen werden die Längsschwingungen des Stabes beschrieben?

☐ $\ddot{u} = -c^2 u''\,,\qquad u(0,t) = 0\,,\qquad u'(L,t) = 0$

☐ $u^{IV} = -c^2 u''\,,\qquad u(0,t) = 0\,,\qquad u'(L,t) = u(L,t)$

☐ $\ddot{u} = c^2 u''\,,\qquad u(0,t) = 0\,,\qquad u'(L,t) = -\dfrac{\mu L}{c^2}\ddot{u}(L,t)$

c) Wie groß ist c und wie bezeichnet man diese Größe aufgrund ihrer physikalischen Bedeutung?

$c =$ ______ ; *Bezeichnung:* ________________

d) Zur Lösung obiger Gleichungen verwendet man den Produktansatz $u(x,t) = W(x)\,y(t)$. Bestimmen Sie die zugehörigen Ableitungen.

$\ddot{u}(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} =$ _______ , $\quad u'(x,t) = \dfrac{\partial u}{\partial x} =$ _______

e) Durch Einsetzen des Produktansatzes in die partielle Differentialgleichung entsteht die gewöhnliche Differentialgleichung $\ddot{y} + \omega^2 y = 0$ mit der zunächst noch unbekannten Eigenfrequenz ω. Wie lässt sich damit $\ddot{u}(x,t)$ alternativ darstellen?

☐ $\ddot{u} = -\omega^2 W y$ ☐ $\ddot{u} = -\omega^2 W$ ☐ $\ddot{u} = \omega^2 y$

f) Welche Bedingungen für $W(x)$ ergeben sich damit aus den Randbedingungen in Teilaufgabe b)?

$W(0) =$ ________________

$W'(L) =$ ________________

g) Weiterhin liefert der Produktansatz die lineare Differentialgleichung $W'' + (\omega/c)^2 W = 0$ mit der allgemeinen Lösung

$$W(x) = C\cos\frac{\omega}{c}x + D\sin\frac{\omega}{c}x\,.$$

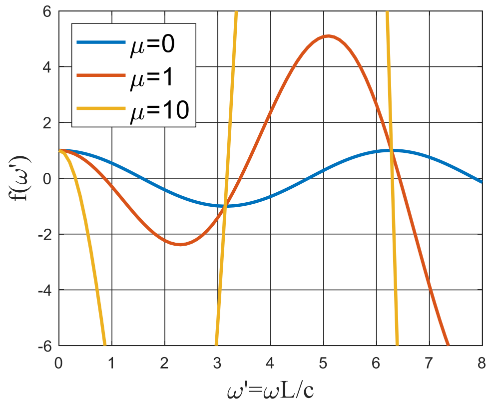
Ergänzen Sie das Gleichungssystem für die zunächst noch unbekannten Koeffizienten $C, D \in \mathbb{R}$, das mit der Abkürzung $\omega' = \omega L/c$ aus Teilaufgabe f) resultiert.

$$\begin{bmatrix} & \\ -(\sin\omega' + \mu\omega'\cos\omega') & (\cos\omega' - \mu\omega'\sin\omega') \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

h) Welche charakteristische Gleichung muss erfüllt sein, damit dieses Gleichungssystem nicht-triviale Lösungen hat?

$f(\omega') :=$ ____________________ $= 0$

i) Das Diagramm zeigt die charakteristische Funktion $f(\omega')$ für verschiedene Werte von μ. Wie verändern sich die Eigenfrequenzen ω_i des Systems, wenn die Endmasse im Verhältnis zur Stabmasse zunimmt?

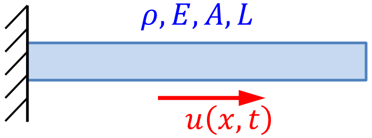


☐ ω_i *fallen*

☐ ω_i *steigen*

☐ ω_i *unabhängig von* μ

j) Wie lautet die charakteristische Gleichung für den Stab ohne Endmasse für fest-freie Randbedingungen? Wie groß sind die daraus resultierenden ersten drei Eigenfrequenzen?



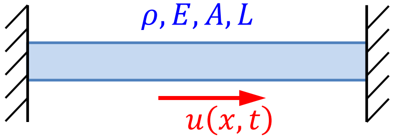
☐ $\sin\omega' = 0$ ☐ $\cos\omega' = 0$ ☐ $\tan\omega' = 0$

$\rightarrow \omega_1' =$ ____ , $\omega_2' =$ ____ , $\omega_3' =$ ____

k) Welchem Fall entspricht dies in Teilaufgabe i)?

☐ $\mu = 0$ ☐ $\mu = 1$ ☐ $\mu = 10$

l) Für $\mu \rightarrow \infty$ verhält sich die Endmasse aufgrund der hohen Trägheit wie eine feste Einspannung. Wie lautet die charakteristische Gleichung für den fest-fest eingespannten Stab und welche Eigenfrequenzen resultieren daraus?

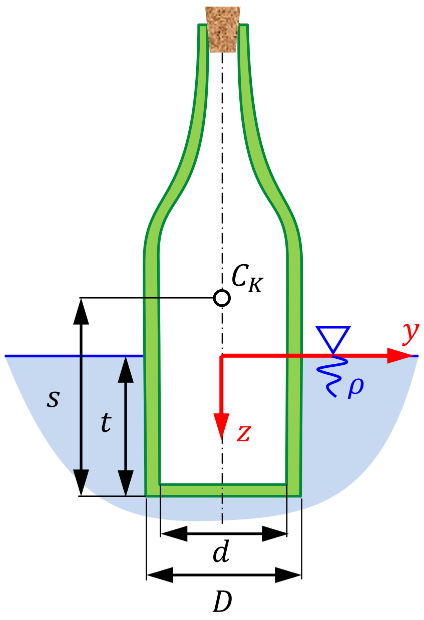


☐ $\sin\omega' = 0$ ☐ $\cos\omega' = 0$ ☐ $\tan\omega' = 0$

$\rightarrow \omega_1' =$ ____ , $\omega_2' =$ ____ , $\omega_3' =$ ____

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Eine leere Flasche (Schwerpunkthöhe s) schwimmt im zylindrischen Bereich (Innendurchmesser d, Außendurchmesser D) aufrecht im Wasser (Dichte ρ, Eintauchtiefe t).



a) Geben Sie den Inhalt A der Schwimmfläche, deren axiales Flächenträgheitsmoment I_x sowie das Volumen V der verdrängten Flüssigkeit an.

$A =$ ______ ,

$I_x =$ ______ ,

$V =$ ______

b) Wo liegen die Schwerpunkte C_K der Flasche sowie C_F des verdrängten Wasservolumens? Geben Sie jeweils deren z-Koordinaten an.

$z_K =$ ______ , $z_F =$ ______

c) Wie groß ist die Metazenterhöhe?

$h_M =$ ____________________

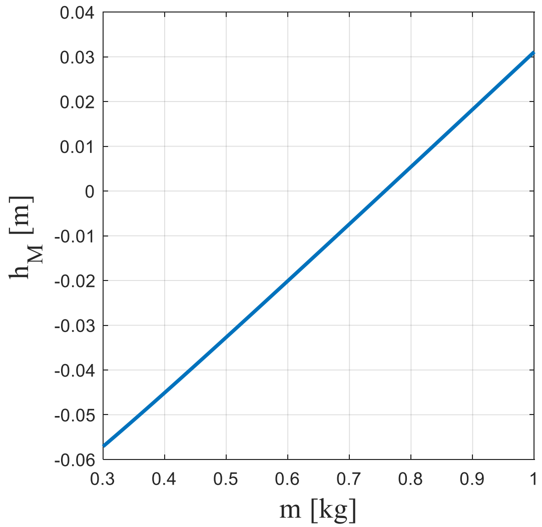
d) Welche Eintauchtiefe hat eine Flasche der Masse m?

$t =$ ______

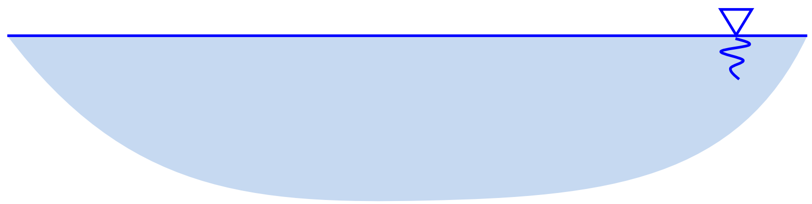
e) Für $D = 7$ cm, $s = 10$ cm ergibt sich abhängig von der Flaschenmasse m nebenstehende Metazenterhöhe. Wie schwer muss die Flasche sein, um in aufrechter Position stabil schwimmen zu können?

☐ $m >$ ______

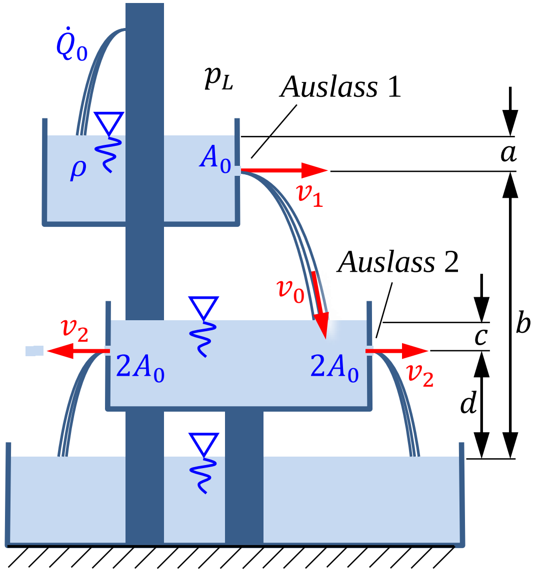
☐ $m <$ ______



f) Skizzieren Sie eine stabile Schwimmlage der Flasche, wenn obige Bedingung verletzt ist.



Aufgabe 6 (12 Punkte)



Auf dem Cottbuser Schloßkirchplatz steht ein Brunnen mit mehreren Becken mit unterschiedlicher Anzahl von Auslässen. Das Wasser (Dichte ρ) fließt zunächst in das obere Becken mit einem einzelnen Auslass 1 (Fläche A_0, Höhe b, Austrittsgeschwindigkeit v_1). Der ausfließende Wasserstrahl tritt mit der Geschwindigkeit v_0 in das mittlere Becken ein und von dort an zwei Auslassstellen 2 (jeweils Fläche $2A_0$, Auslasshöhe d, Austrittsgeschwindigkeit v_2) wieder aus. Nach dem Auffangen wird das Wasser wieder nach oben zum obersten Auslass gepumpt (Volumenstrom $\dot{Q}_0$). Betrachtet wird der stationäre Zustand des Brunnens, der Luftdruck ist p_L.

a) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung zwischen Auslass 1 und dem Auftreffen des Wasserstrahls auf die Oberfläche im mittleren Becken.

____

b) Lösen Sie die Gleichung nach v_0 auf.

$v_0 =$ ________________

c) Welche Austrittsgeschwindigkeit und welcher Volumenstrom ergeben sich im Auslass 1 aus der Wasserstandshöhe a im oberen Becken?

$v_1 =$ ________ , $\dot{Q}_1 =$ __________

d) Welche Austrittsgeschwindigkeit und welcher Volumenstrom ergeben sich an einem einzelnen Auslass 2 aus der Wasserstandshöhe c im mittleren Becken?

$v_2 =$ ________ , $\dot{Q}_2 =$ __________

e) In welchem Verhältnis stehen die Volumenströme $\dot{Q}_1$ und $\dot{Q}_2$ im stationären Zustand? Welches Verhältnis der Wasserstandshöhen a und c ergibt sich daraus?

☐ $\frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_2} = 1$ ☐ $\frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_2} = 2$ ☐ $\frac{\dot{Q}_1}{\dot{Q}_2} = 4$

$\rightarrow$ ☐ $\frac{a}{c} = 2$ ☐ $\frac{a}{c} = 4$ ☐ $\frac{a}{c} = 8$ ☐ $\frac{a}{c} = 16$

f) Welche Wasserstandshöhe c stellt sich im mittleren Becken bei einem Volumenstrom $\dot{Q}_0$ der Pumpe ein?

$c =$ _______

g) Wo geht bei diesen idealisierten Betrachtungen nach Bernoulli die Pumpenantriebsenergie verloren?

☐ *direkt im Auslass*

☐ *im Wasserstrahl*

☐ *beim Auftreffen des Wasserstrahls*

☐ *in der Zuströmung im Bereich des Auslasses*

ENDE