Prüfungsklausur Technische Mechanik III

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

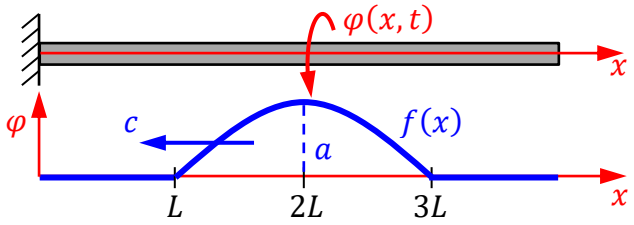
.....
(Unterschrift)

Punkte	Note	

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein Torsionsstab (Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c) ist linksseitig fest eingespannt. Das Bild zeigt die Halbwelle $f(x+ct)$ seiner Torsionsschwingung $\varphi(x,t)$ in Form eines Sinus-Halbbogens zum Zeitpunkt $t=0$.

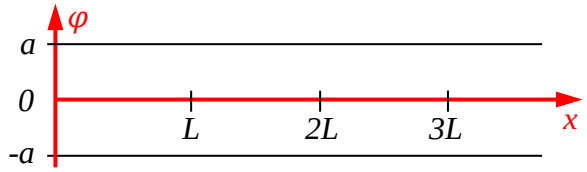


a) Wie entsteht die Halbwelle aus einer gegebenen Anfangsbedingung $\varphi(x,0)=\varphi_0(x)$, $\dot{\varphi}(x,0)=0$?

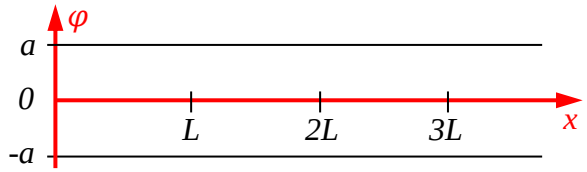
$f(x) =$ _ _ _ _ _ _

b) Zeichnen Sie die Halbwelle für die Zeitpunkte $t_k = kL/c$ für $k = 1 \ldots 3$.

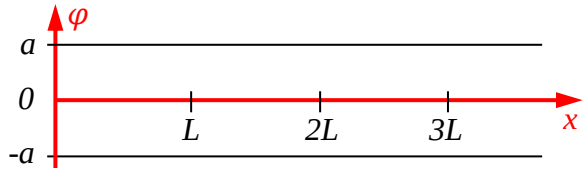
$t = L/c$:



$t = 2L/c$:

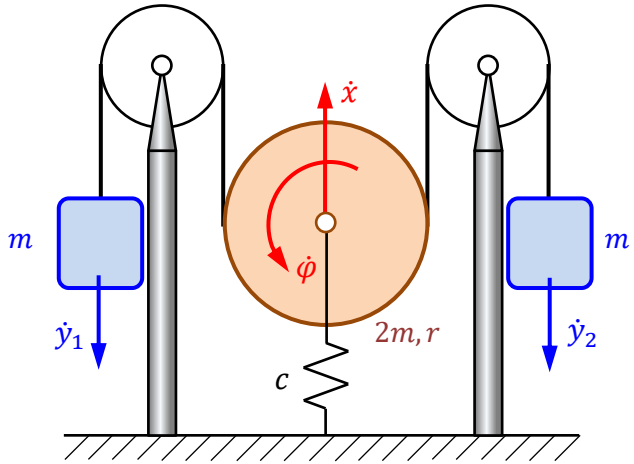


$t = 3L/c$:



Aufgabe 2 (11 Punkte)

Eine zylindrische homogene Scheibe (Masse $2m$, Radius r) liegt in einer Seilschlaufe und wird nach unten elastisch abgespannt (Federsteifigkeit c). Das Seil läuft über zwei masselose Umlenkrollen, an dessen Enden jeweils Gegengewichte (Masse m) hängen. Die Feder ist für $x = 0$ entspannt.



a) Geben Sie die kinetische Energie des Systems unter direkter Verwendung obiger Geschwindigkeiten an.

$T =$

_ _

b) Wie groß ist die potenzielle Energie des Gesamtsystems bei Verwendung der jeweiligen Einzelverschiebungen x, y_1 und y_2?

$U =$

_ _

c) Welche kinematischen Bindungen ergeben sich durch die Undehnbarkeit des Seils? Stellen folgende Geschwindigkeiten als Funktion der Walzengeschwindigkeiten $\dot{x}$ und $\dot{\varphi}$ dar.

$\dot{y}_1 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _ , $\dot{y}_2 =$ _ _ _ _ _ _ _ _ _ _

d) Wie lautet die Lagrange Funktion?

☐ $L = 2m\dot{x}^2 + \frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}cx^2$

☐ $L = m\dot{x}^2 + mr\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}cx^2$

☐ $L = m\dot{x}^2 + mr\dot{x}\dot{\varphi} + \frac{3}{2}mr^2\dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2}cx^2 - 2mgx$

Aufgabe 3 (13 Punkte)

Für das System in Aufgabe 2 findet man die Bewegungsgleichung

$$\begin{bmatrix} 4m & 0 \\ 0 & 3mr^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \mathbf{0}\,.$$

a) Welche Gleichgewichtslagen sind möglich?

$x =$ _____ , $\varphi =$ _____

b) Wie lautet das allgemeine Eigenwertproblem im vorliegenden Fall?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \tilde{\boldsymbol{y}} = \mathbf{0}\,.$$

c) Bestimmen Sie die zugehörige charakteristische Gleichung.

_____ $= 0$

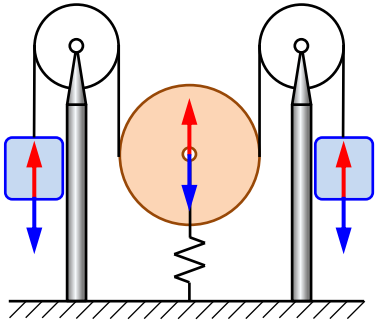
d) Berechnen Sie die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren.

$\omega_1 =$ _____ , $\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

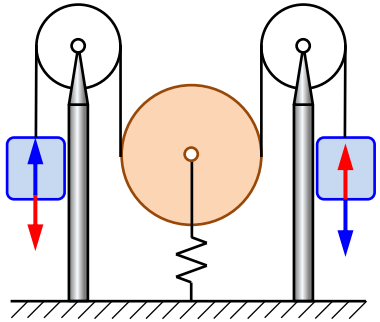
$\omega_2 =$ _____ , $\tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

e) Ordnen Sie folgenden Bildern jeweils die entsprechende Schwingungseigenform zu.

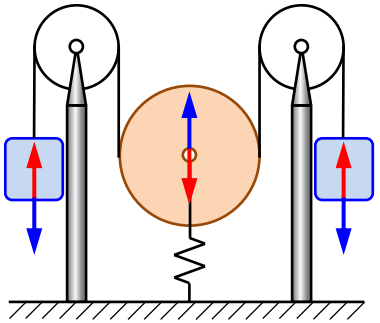
☐ *1. Eigenform*
☐ *2. Eigenform*
☐ *keine Eigenform*



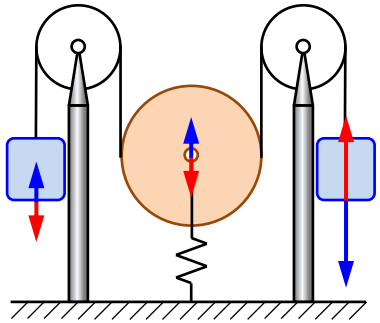
☐ *1. Eigenform*
☐ *2. Eigenform*
☐ *keine Eigenform*



☐ *1. Eigenform*
☐ *2. Eigenform*
☐ *keine Eigenform*

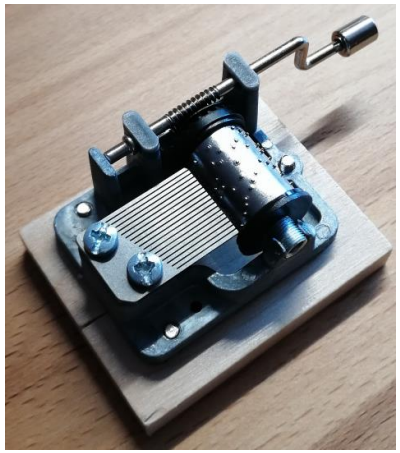


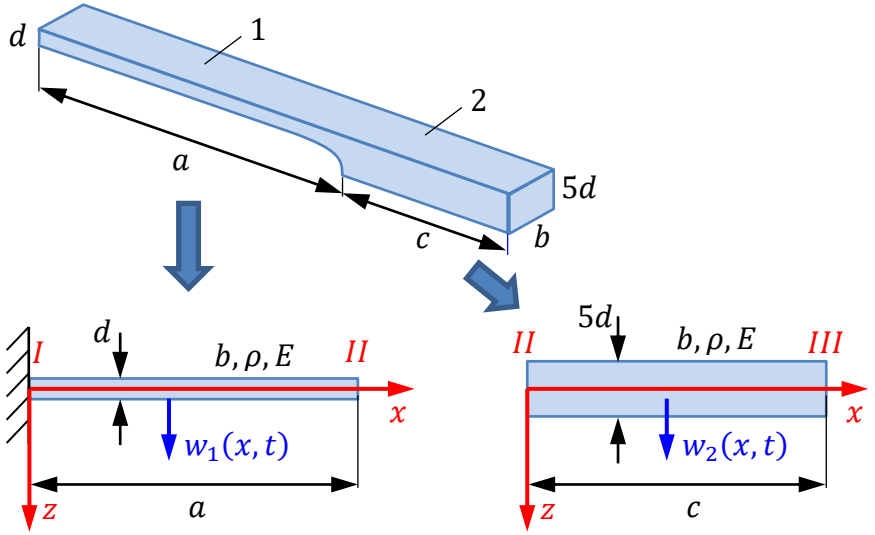
☐ *1. Eigenform*
☐ *2. Eigenform*
☐ *keine Eigenform*



Aufgabe 4 (16 Punkte)

Um auf einer Spieluhr tiefe Töne zu erzeugen, werden die Stimmzungen so ausgefräst, dass sie im Fußteil dünner sind als im Kopfteil. Dies lässt sich als Biegebalken (Breite b, Dichte ρ, Elastizitätsmodul E) mit zwei Abschnitten und entsprechenden Übergangsbedingungen modellieren. Der Fußteil 1 (Länge a, Dicke d) ist am linken Rand I fest eingespannt und geht am rechten Rand II in den Kopfteil 2 (Länge c, Dicke $5d$) über, der rechts ein freies Ende III hat. Das Eigengewicht wird vernachlässigt.





a) Wie groß sind Querschnittsflächen und maßgeblichen Flächenträgheitsmomente in den beiden Abschnitten 1 und 2?

$A_1 =$ _____, $A_2 =$ _____

$I_1 =$ _____, $I_2 =$ _____

b) Wie lauten die partiellen Differentialgleichungen für die Biegeschwingungen in den beiden Abschnitten 1 und 2?

$\ddot{w}_1 +$ _____ $w_1^{IV} = 0$, $\ddot{w}_2 +$ _____ $w_2^{IV} = 0$

c) Zur Lösung dieser Differentialgleichungen macht man typischerweise den Produktansatz $w(x,t) = W(x)\,y(t)$. Wie sieht dabei der allgemeine Ansatz für die Eigenschwingungsformen aus?

$W(x) =$ _____

d) Wie viele unbekannte Koeffizienten haben diese Ansatzfunktionen für $w_1(x,t)$ und $w_2(x,t)$ insgesamt und wie viele Gleichungen werden zu deren Bestimmung benötigt?

☐ 2 ☐ 4 ☐ 6 ☐ 8 ☐ 10 ☐ 12

e) Wie lauten die Randbedingungen an der Einspannstelle I?

$w_1($_____$) =$ _____, _____ $=$ _____

f) Wie lauten die Randbedingungen für $w_2(x,t)$ am freien Ende III

_____ $=$ _____, _____ $=$ _____

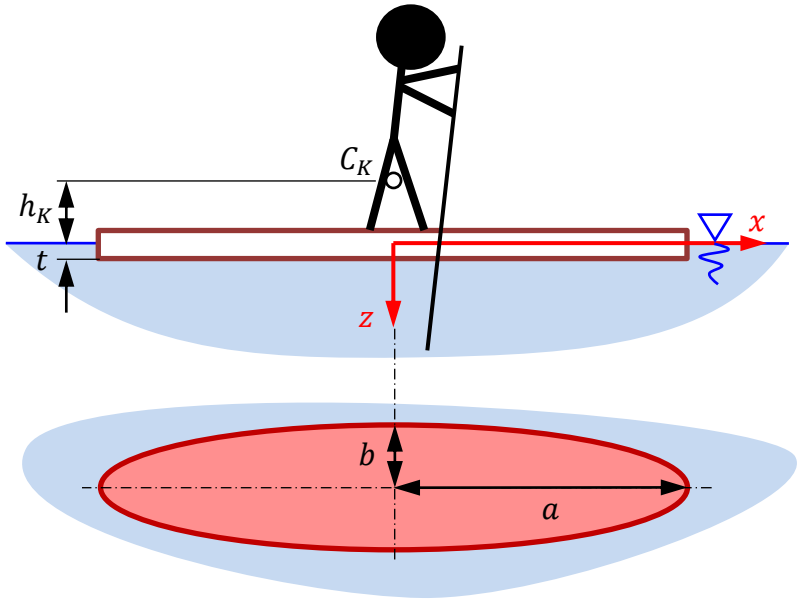
g) Welche Übergangsbedingungen sind an der Stelle II zu erfüllen?

$w_1(a,t) =$ _____, $w_1'(a,t) =$ _____

$w_1''(a,t) =$ _____, $w_1'''(a,t) =$ _____

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Das Board eines Standup Paddlers ist eine ebene Scheibe mit konstanter Dicke und elliptischer Grundfläche (Flächeninhalt $A = \pi ab$, axiales Flächenträgheitsmoment $I_x = \pi ab^3/4$, Eintauchtiefe t).



a) Wie groß ist das Verhältnis von Flächenträgheitsmoment I_x zu verdrängtem Wasservolumen V?

$\frac{I_x}{V} =$ _ _ _ _ _ _

b) Welche z-Koordinaten haben der gemeinsame Schwerpunkt C_K von Board und Paddler (Höhe h_K über Wasserspiegel) sowie der Schwerpunkt C_F des verdrängten Wasservolumens?

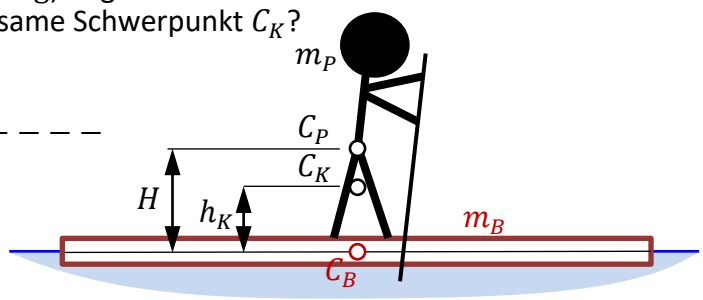
$z_K =$ _ _ _ _ _ _ , $z_F =$ _ _ _ _ _ _

c) Welche Metazenterhöhe folgt daraus?

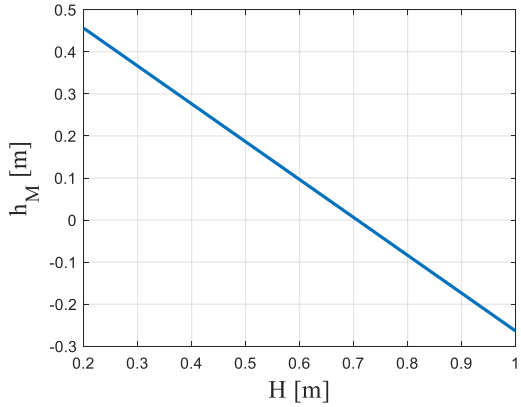
$h_M =$ _

d) Der Paddler (Schwerpunkt C_P) hat die Masse $m_P = 90$ kg und Schwerpunkthöhe H über Wasserspiegel. Der Schwerpunkt C_B des Boards (Masse $m_B = 10$ kg) liegt auf Höhe der Wasseroberfläche. Wie hoch liegt der gemeinsame Schwerpunkt C_K?

$h_K =$ _ _ _ _ _ _ _



e) Der Paddler sitzt zunächst auf dem Board und steht dann langsam auf. Das Diagramm zeigt die Metazenterhöhe für ein handelsübliches Board in Abhängigkeit der Schwerpunkthöhe H. Warum ist das Board mit dem sitzenden Paddler ($H = 0.2$ m) zunächst stabil?



_ _

f) Wie weit darf sich der Paddler in Teilaufgabe e) höchstens erheben, damit das System seine Stabilität nicht verliert?

$H \leq$ _ _ _ _ _ _ _

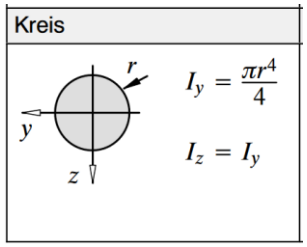
g) Wie groß ist das axiale Flächenträgheitsmoment I_y und warum kippt das Board eher um die x-Achse als um die y-Achse?

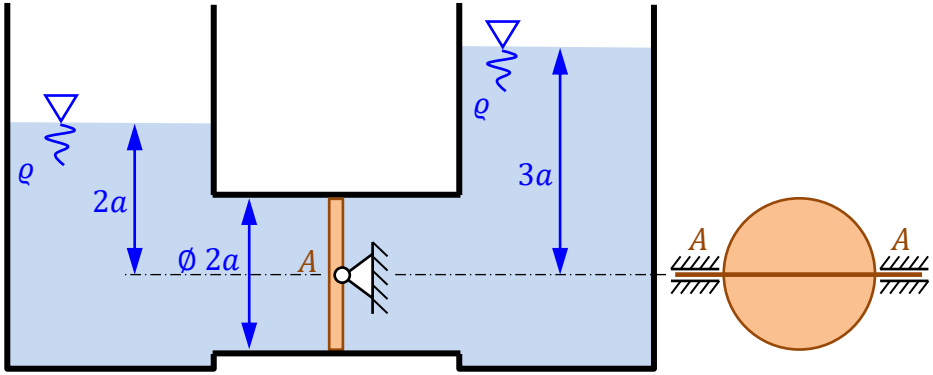
$I_y =$ _ _ _ _ _ _

Grund: _

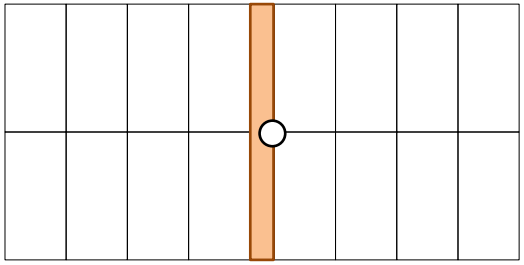
Aufgabe 6 (10 Punkte)

Zwei oben offene Behälter sind unterschiedlich hoch mit Wasser (Dichte ρ) gefüllt und mit einem zylindrischen Rohr (Durchmesser $2a$) verbunden, das mit einer Klappe verschlossen ist. Die Klappe ist um eine horizontale Achse A durch Ihren Flächenmittelpunkt drehbar gelagert, wird aber zunächst fixiert.





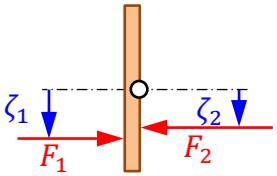
a) Skizzieren Sie die Wasserdrücke auf beiden Seiten der Klappe im richtigen Verhältnis zueinander.



b) Berechnen Sie die aus dem Wasserdruck resultierenden Kräfte auf beide Seiten der Klappe sowie deren Angriffspunkte.

$F_1 =$ _____ , $\zeta_1 =$ _____

$F_2 =$ _____ , $\zeta_2 =$ _____



c) Wie groß sind die Momentenwirkungen dieser Druckkräfte bezüglich der Drehachse A?

$M_{A,1} =$ _____ , $M_{A,2} =$ _____

d) Was wird geschehen, wenn man die Drehung der Klappe freigibt?

☐ *Klappe kippt im Uhrzeigersinn*

☐ *Klappe kippt gegen Uhrzeigersinn*

☐ *Klappe bleibt geschlossen*

e) Was geschieht, wenn der Wasserspiegel im rechten Behälter angehoben wird? Begründen Sie Ihre Antwort.

_____

weil

_____

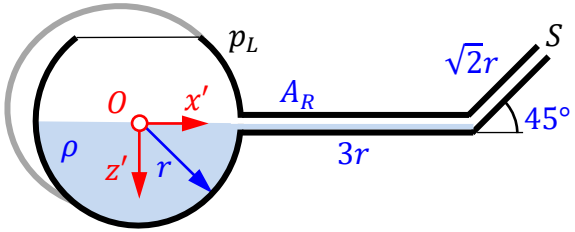
_____

Aufgabe 7 (9 Punkte)

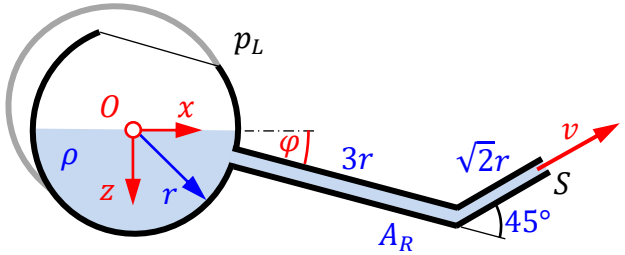
Eine Gießkanne besteht aus einem oben offenem, kugelförmigen Behälter (Radius r) und einem abgewinkelten Gießrohr (Länge $(3+\sqrt{2})r$, Rohrquerschnittsfläche A_R). Sie ist zur Hälfte mit Wasser (Dichte ρ) befüllt. Durch Neigen (Winkel φ) fließt das Wasser an der Spitze des Gießrohrs mit der Geschwindigkeit v aus. Der Luftdruck ist p_L

a) Welche Koordinaten hat die Gießrohrspitze S im kannenfesten $x'y'z'$–Koordinatensystem?

$$\boldsymbol{r}' = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



b) Welche Koordinaten hat die Gießrohrspitze S der geneigten Kanne im inertialen xyz–Koordinatensystem?



$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Wie groß muss der Gießwinkel φ mindestens sein, damit Wasser austritt?

$\varphi > \varphi_0 \quad mit$ ☐ $\varphi_0 = 0°$ ☐ $\varphi_0 = 11.3°$ ☐ $\varphi_0 = 21.3°$

d) Unter welcher Bedingung darf beim Ausgießen die Absenkgeschwindigkeit des Wasserspiegels vernachlässigt werden?

$\ll$

– – – – – – – – – – – –

e) Formulieren Sie unter dieser Bedingung für $\varphi > \varphi_0$ die Bernoulli-Gleichung für eine Stromlinie vom Behältermittelpunkt O zur Gießrohrspitze S.

– –

f) Welche Ausflussgeschwindigkeit ergibt sich damit für $\varphi > \varphi_0$?

$v =$

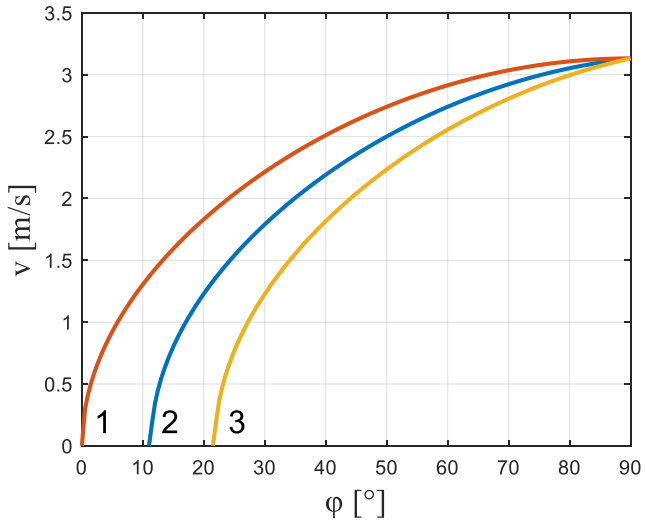
– – – – – – – – – – – – – – – – – – – –

g) Welche Kurve spiegelt dieses Verhalten wider?

☐ 1

☐ 2

☐ 3



ENDE