Prüfungsklausur Technische Mechanik III

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

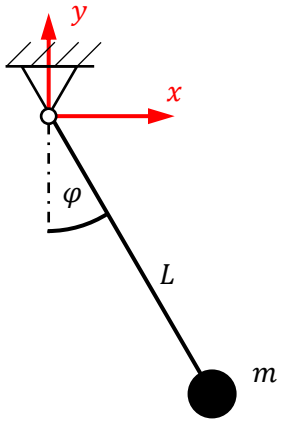
.....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl:	72
zum Bestehen erforderlich:	36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Eine Punktmasse (Masse m) ist an einem Seil (Länge L) aufgehängt.



a) Geben Sie die Lage der Masse an.

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

b) Geben Sie die virtuelle Verschiebung der Masse und deren Gewichtskraft an.

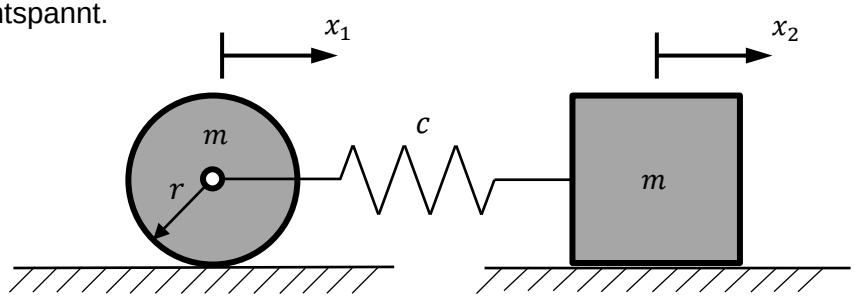
$$\delta\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

c) Welche virtuelle Arbeit verrichtet die Gewichtskraft am Pendel?

$$\delta W^e = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Eine homogene Walze (Masse m, Radius r) rollt auf einer Unterlage und ist über eine Feder (Steifigkeit c) mit einem Quader (Masse m) verbunden. Es handelt sich um ein konservatives System und die Feder ist für $x_1 = x_2 = 0$ entspannt.



a) Wie groß ist die kinetische Energie des Gesamtsystems?

$T =$ _____

b) Wie groß ist die potenzielle Energie des Gesamtsystems?

$U =$ _____

c) Wie lautet die Lagrange Funktion?

☐ $L = \frac{3}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{2}m\dot{x}_2^2 - c(x_2 - x_1)^2$

☐ $L = m\dot{x}_1^2 + \frac{3}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2$

☐ $L = \frac{3}{4}m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 - \frac{1}{2}c(x_2 - x_1)^2$

d) Bilden Sie folgenden Ableitungen

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} =$ _____ , $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} =$ _____

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} =$ _____ , $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} =$ _____

$\frac{\partial L}{\partial x_1} =$ _____ , $\frac{\partial L}{\partial x_2} =$ _____

e) Wie lauten die Bewegungsgleichungen in Matrizenform?

$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (11 Punkte)

Für einen bestimmten Wert des Parameters m ist die Massenmatrix des Systems aus Aufgabe 2

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

und die Eigenvektoren des Systems sind

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} c_1, \qquad \tilde{\boldsymbol{y}}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1{,}5 \end{bmatrix} c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

a) Wie lautet die Bedingung für massenorthogonale Eigenvektoren $\boldsymbol{y}_k$?

☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_k = 0$ ☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_k = 1$ ☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{M} \tilde{\boldsymbol{y}}_k^T = 1$ ☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T \boldsymbol{K} \tilde{\boldsymbol{y}}_k = 1$

b) Formulieren Sie diese Normierungsbedingung für die beiden Eigenvektoren und bestimmen Sie jeweils die freien Konstanten.

$Normierung\ des\ Eigenvektors\ y_1$:

_ _

$\Rightarrow c_1 =$ _ _ _ _

$Normierung\ des\ Eigenvektors\ y_2$:

_ _

$\Rightarrow c_2 =$ _ _ _ _

c) Wie lautet die massenorthogonale Modalmatrix?

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} & \\ & \\ & \end{bmatrix}$$

. .

d) Berechnen Sie $\boldsymbol{Y}^T \boldsymbol{M}$.

☐ $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{45}} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \sqrt{\frac{3}{45}} & -\sqrt{\frac{3}{45}} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sqrt{\frac{6}{5}} & -\sqrt{\frac{6}{5}} \end{bmatrix}$

☐ $\begin{bmatrix} 3\sqrt{5} & 3\sqrt{5} \\ \sqrt{10} & -\sqrt{11} \end{bmatrix}$ ☐ $\begin{bmatrix} \frac{3}{6} & \frac{2}{3} \\ \sqrt{\frac{1}{5}} & -\sqrt{\frac{1}{5}} \end{bmatrix}$

e) Führen Sie eine Modaltransformation der Anfangsbedingungen

$$\boldsymbol{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \dot{\boldsymbol{y}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

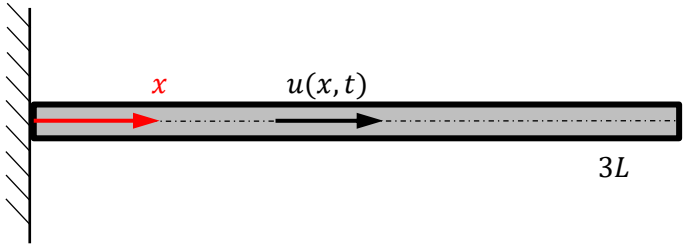
durch.

$$\hat{\boldsymbol{y}}(0) = \underbrace{\_\_\_\_\_}_{Formel} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

$$\dot{\hat{\boldsymbol{y}}}(0) = \underbrace{\_\_\_\_\_}_{Formel} = \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}$$

Aufgabe 4 (11 Punkte)

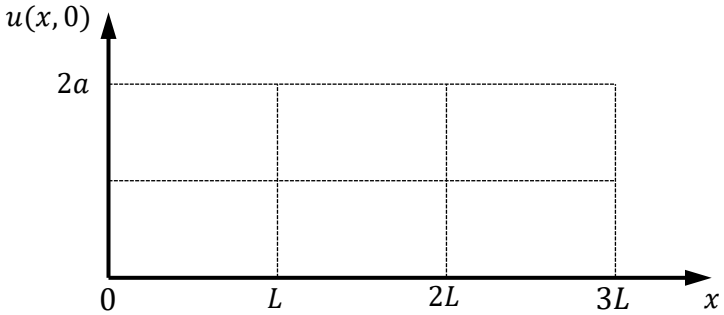
Die freien Longitudinalschwingungen eines linksseitig eingespannten Stabes (Länge $3L$) sollen untersucht werden. Das rechte Ende des Stabes ist frei.



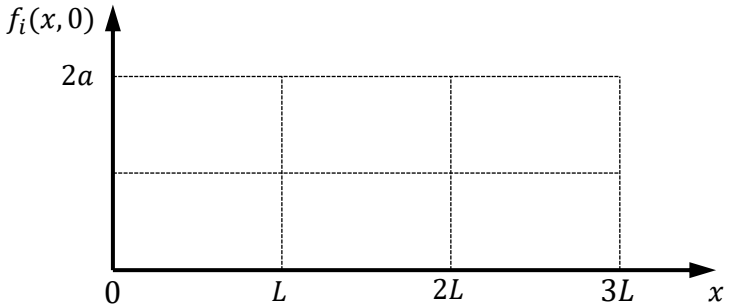
Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist folgende Anfangsverschiebung gegeben:

$$u(x,0) = \begin{cases} \frac{2a}{L}x & \text{für } 0 \le x < L \\ 2a & \text{für } L \le x < 2L \\ 6a - \frac{2a}{L}x & \text{für } 2L \le x \le 3L \end{cases}$$

a) Stellen Sie die Anfangsverschiebung grafisch dar.



b) Skizzieren Sie die Wellenprofile $f_1(x) = f_2(x)$ der gegenläufigen Wellen zum Zeitpunkt $t = 0$ für die gegebene Anfangsverschiebung und verschwindende Anfangsgeschwindigkeit.

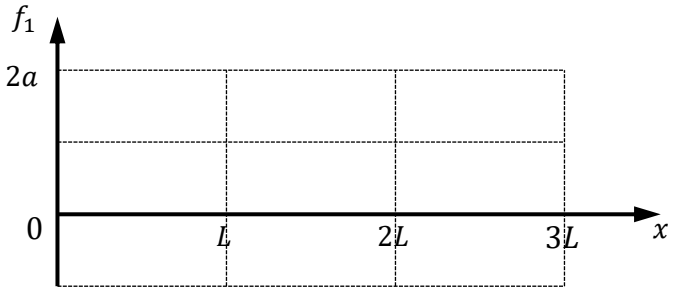


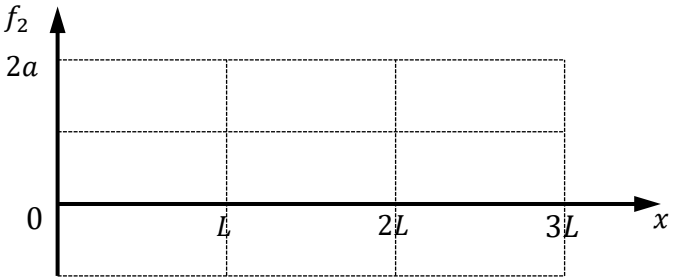
c) Formulieren Sie die Randbedingungen für den Stab und die sich daraus ergebenden Reflexionseigenschaften.

$links$: _ _ _ _ _ _ _ _ ☐ Achsenspiegelung ☐ Punktspiegelung

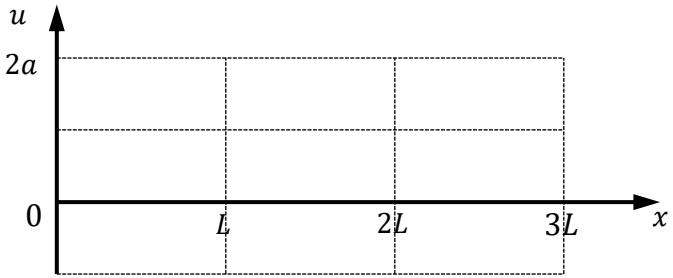
$rechts$: _ _ _ _ _ _ _ _ ☐ Achsenspiegelung ☐ Punktspiegelung

d) Konstruieren Sie die beiden gegenläufigen Wellenprofile $f_1(x - ct)$ und $f_2(x + ct)$ zum Zeitpunkt $t = L/c$ unter Beachtung der Randbedingungen.



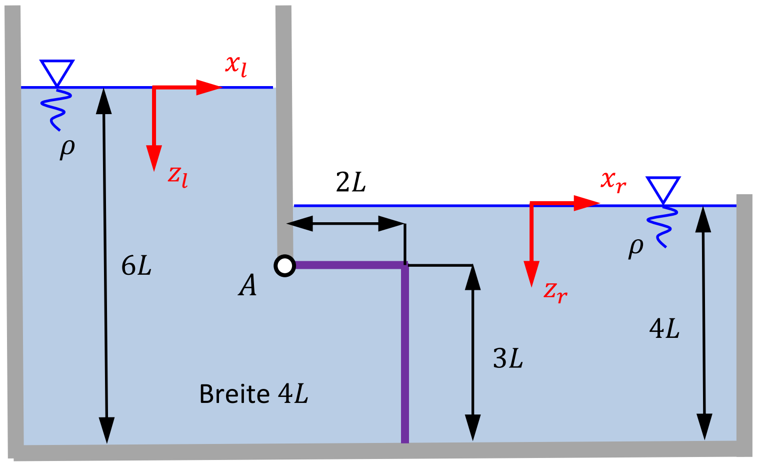


e) Welche Gesamtverschiebung $u(x,t)$ resultiert daraus zum Zeitpunkt $t = L/c$?

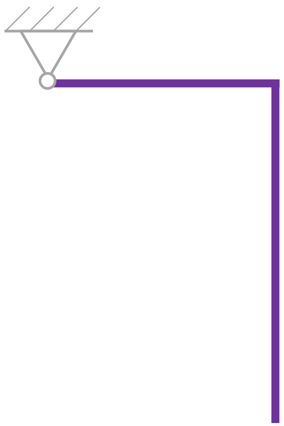


Aufgabe 5 (25 Punkte)

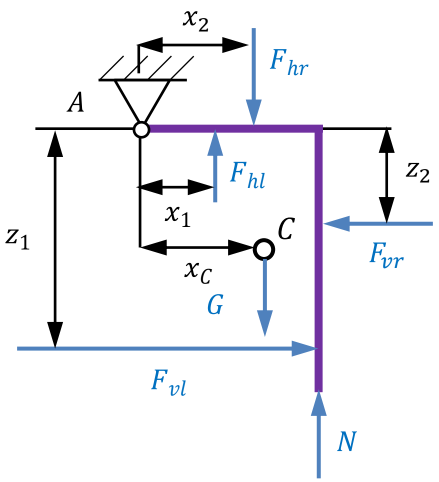
Zwei Becken (Breite $4L$), die mit identischen Flüssigkeiten (Dichte ρ) befüllt sind, werden durch eine L-förmige Klappe (Schwerpunkt C, Gewicht G) getrennt. Die Klappe ist im Punkt A drehbar gelagert und stützt sich am Boden ab. Der Umgebungsdruck soll bei den folgenden Betrachtungen jeweils vernachlässigt werden, da sich seine Wirkung aufhebt.



a) Zeichnen Sie alle Drücke ein, die beidseitig auf die Klappe wirken. Beachten Sie die Größe der Pfeile relativ zueinander.



b) Aus dem Druck resultieren Kräfte auf die horizontalen und vertikalen Klappenteilflächen. Weiterhin wirken die Gewichtskraft G der Klappe und die Stützkraft N zwischen Klappe und Boden.

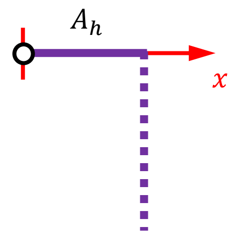


Stellen Sie das Momentengleichgewicht für die Klappe bezüglich Lagerpunkt A auf.

_ _

_ _

c) Zunächst wird der **horizontale** Klappenteil betrachtet. Wie groß sind die Druckflächen und die resultierenden Kräfte, und wo liegen ihre Angriffspunkte?

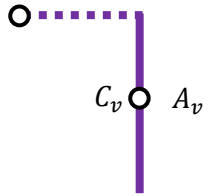


$A_h =$ _ _ _ _ _ ,

$F_{hl} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ , $x_1 =$ _ _ _ _ _ _ _ _

$F_{hr} =$ _ _ _ _ _ _ _ _ , $x_2 =$ _ _ _ _ _ _ _ _

d) Bestimmen Sie für den **vertikalen** Klappenteil Druckfläche und Flächenträgheitsmoment I_{Cy} bezüglich Flächenschwerpunkt C_v.



$A_v =$ _____ , $I_{Cy} =$ _____

e) Geben Sie vom **linken** Becken aus betrachtet die Wassertiefe z_{Cl} des Flächenschwerpunkts C_v des **vertikalen** Klappenteils, die resultierende Kraft sowie die Wassertiefe z_{Dl} ihres Angriffspunkts und dessen Abstand z_1 vom Lagerpunkt A an.

$z_{Cl} =$ _____ , $F_{vl} =$ _____

$z_{Dl} =$ _____ , $z_1 =$ _____

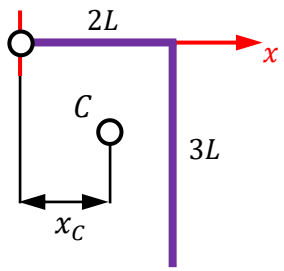
f) Geben Sie vom **rechten** Becken aus betrachtet die Wassertiefe z_{Cr} des Flächenschwerpunkts C_v des **vertikalen** Klappenteils, die resultierende Kraft sowie die Wassertiefe z_{Dr} ihres Angriffspunkts und dessen Abstand z_2 vom Lagerpunkt A an.

$z_{Cr} =$ _____ , $F_{vr} =$ _____

$z_{Dr} =$ _____ , $z_2 =$ _____

g) Der Klappenschwerpunkt C entspricht dem Linienmittelpunkt ihres Querschnitts. Geben Sie dazu die Längen L_i mit den Koordinaten x_i der Mittelpunkte beider Linienabschnitte an und bestimmen Sie daraus die Lage des Linenmittelpunkts x_C.

	L_i	x_i	$L_i x_i$
Vertikale Linie			
Horizontale Linie			
$\sum$			



$\Rightarrow x_C =$ _____

h) Wie lautet das Momentengleichgewicht der Teilaufgabe b?

☐ $1120\rho g L^4 + 8GL + 15NL = 0$

☐ $260\rho g L^4 - 8GL + 10NL = 0$

☐ $2060\rho g L^4 - 3GL - 8NL = 0$

☐ $980\rho g L^4 + 9GL - 20NL = 0$

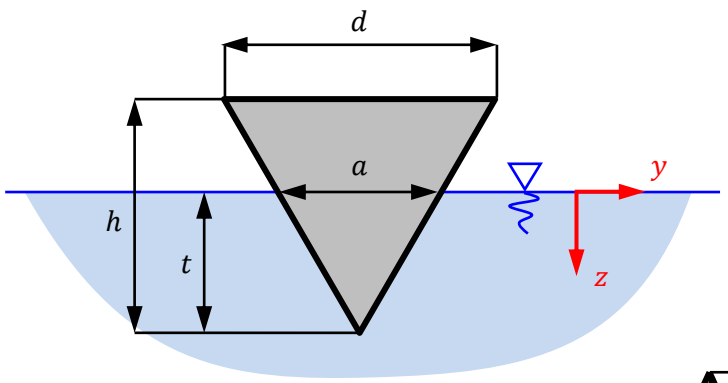
i) Wie groß darf das Gewicht der Klappe höchstens sein, damit sie sich bei den untersuchten Wasserständen öffnet?

☐ $G < \frac{65}{2}\rho g L^3$ ☐ $G < 15\rho g L^3$

☐ $G < \frac{80}{11}\rho g L^3$ ☐ $G < \frac{113}{21}\rho g L^3$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

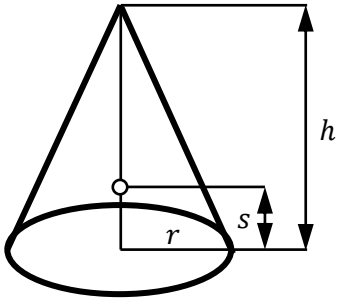
Ein homogener Kreiskegel (Durchmesser d, Höhe h) schwimmt mit der Spitze nach unten in einer Flüssigkeit (Eintauchtiefe t). Die Hilfsvariable a beschreibt zunächst den Durchmesser der Schwimmfläche.



Hinweise zum Kreiskegel:

Volumen $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Volumenmittelpunkt $s = \frac{h}{4}$



a) Berechnen Sie das Volumen der verdrängten Flüssigkeit und das Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche.

V = _____ , I_x = _____

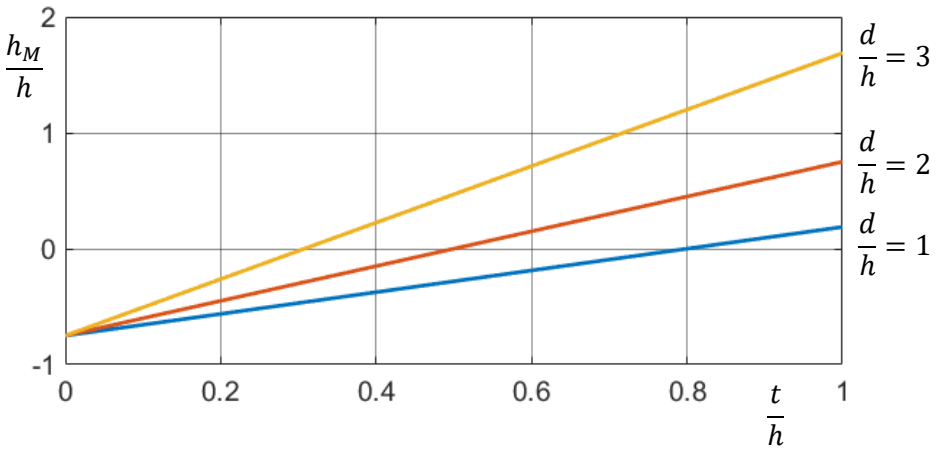
b) Geben Sie die Schwerpunktlagen des Kreiskegels und der verdrängten Flüssigkeit an.

z_K = _____ , z_F = _____

c) Welches Verhältnis bestimmt die Hilfsgröße a?

☐ $\frac{t}{a} = \frac{d}{h}$ ☐ $\frac{a}{t} = \frac{d}{h}$ ☐ $\frac{d}{a} = \frac{t}{h}$ ☐ $a = t$

d) Das Bild zeigt für verschiedene Kegelformen die Metazenterhöhe h_M in Abhängigkeit der Eintauchtiefen t.



Für welche Eintauchtiefe schwimmt ein Kegel mit $d/h = 1$ stabil?

_____ $\leq \frac{t}{h} \leq$ _____

e) Welche Kegelgeometrie ist für einen großen Bereich stabiler Eintauchtiefen günstig?

☐ $\frac{d}{h}$ klein ☐ $\frac{d}{h}$ groß ☐ $\frac{d}{h}$ egal

E N D E