Prüfungsklausur Technische Mechanik III

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

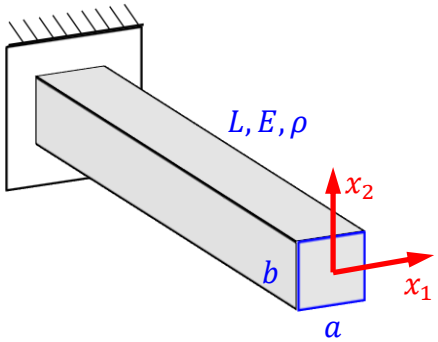
1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

.....
(Unterschrift)

Punkte	Note	

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Aufgabe 1 (5 Punkte)



Lissajous-Figuren entstehen durch die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen $x_1 = \sin 2\pi f_1 t$ und $x_2 = \sin 2\pi f_2 t$ in verschiedene Richtungen mit unterschiedlichen Frequenzen f_1 und f_2. Sie entstehen beispielsweise an der Spitze eines Kragbalkens (Länge L, Elastizitätsmodul E, Dichte ρ) mit Rechteckquerschnitt (Kantenlängen a und b).

a) Wie berechnet sich allgemein die Schwingungsfrequenz (in Hertz) der ersten Biegeeigenschwingung eines Kragbalkens?

☐ $f = \frac{3.52}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$ ☐ $f = 2\pi \cdot 3.52\sqrt{\frac{EI}{\rho A L^4}}$ ☐ $f = \frac{2\pi}{3.52}\sqrt{\frac{\rho A L^4}{EI}}$

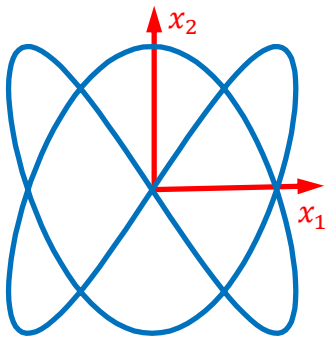
b) Wie groß sind im vorliegenden Fall die maßgeblichen Flächenträgheitsmomente I_1 und I_2 für die Eigenschwingungen in x_1- und x_2-Richtung?

$I_1 =$ _____ , $I_2 =$ _____

c) Welches Frequenzverhältnis ergibt sich damit aus den Kantenlängen des Rechteckquerschnitts für die beiden Eigenschwingungen in x_1- und x_2-Richtung?

$\frac{f_1}{f_2} =$ _____

d) Nebenstehende Lissajous-Figur entsteht bei einem Frequenzverhältnis von $f_1 : f_2 = 2:3$. Welches Kantenverhältnis muss der Kragbalken dafür haben?

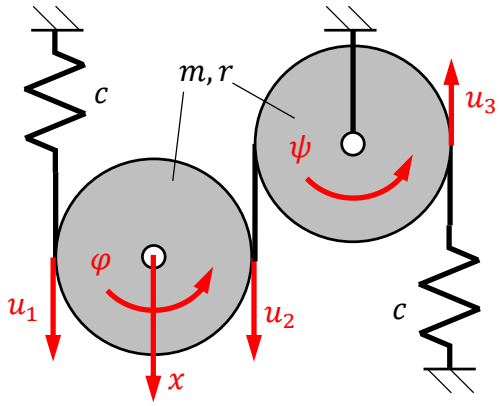


☐ $\frac{a}{b} = \frac{27}{8}$ ☐ $\frac{a}{b} = \frac{9}{4}$ ☐ $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

☐ $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ ☐ $\frac{a}{b} = \frac{4}{9}$

Aufgabe 2 (21 Punkte)

Zwei homogene, zylindrische Rollen (jeweils Masse m, Radius r) sind über ein masseloses, undehnbares Seil miteinander sowie über Federn (jeweils Steifigkeit c) mit der Umwelt verbunden. Für $x = u_1 = u_2 = u_3 = \varphi = \psi = 0$ sind die Federn entspannt.



a) Welche verallgemeinerten Koordinaten beschreiben das System eindeutig?

☐ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}$ ☐ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$ ☐ $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ \varphi \\ \psi \end{bmatrix}$ ☐ $\mathbf{y} = [x\ \varphi\ \psi\ u_1\ u_2\ u_3]^T$

b) Wie groß ist die kinetische Energie des Gesamtsystems?

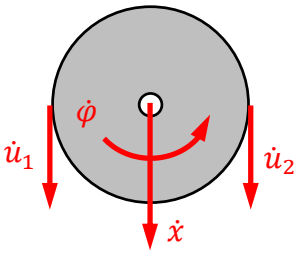
$T =$ _____

c) Wie groß ist die potenzielle Energie des Gesamtsystems?

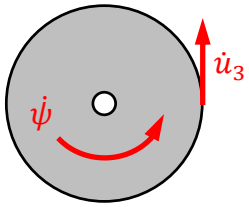
$U =$ _____

d) Beschreiben Sie die kinematischen Zusammenhänge zwischen $\dot{u}_1$, $\dot{u}_2$ und $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$ für die bewegliche Rolle:

$\dot{u}_1 =$ _____ , $\dot{u}_2 =$ _____



e) Beschreiben Sie folgende kinematischen Größen in Abhängigkeit von $\dot{x}$, $\dot{\varphi}$:



$\dot{u}_3 =$ _____ , $\dot{\psi} =$ _____

f) Bilden Sie zur Lagrange-Funktion

$$L = \frac{mr^2}{2}\dot{\varphi}^2 + \frac{3m}{4}\dot{x}^2 - \frac{mr}{2}\dot{x}\dot{\varphi} - cx^2 - cr^2\varphi^2 + mgx$$

folgende Ableitungen:

$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} =$ _____ , $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} =$ _____

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$ _____ , $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} =$ _____

$\frac{\partial L}{\partial x} =$ _____ , $\frac{\partial L}{\partial \varphi} =$ _____

g) Wie lauten die Bewegungsgleichungen in Matrizenform?

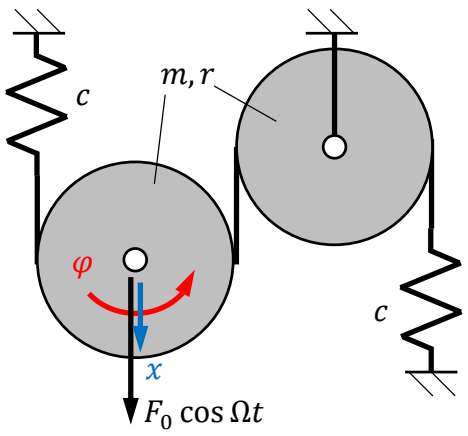
$$\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

h) Welche Gleichgewichtslage ergibt sich daraus?

$$\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}_0 = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

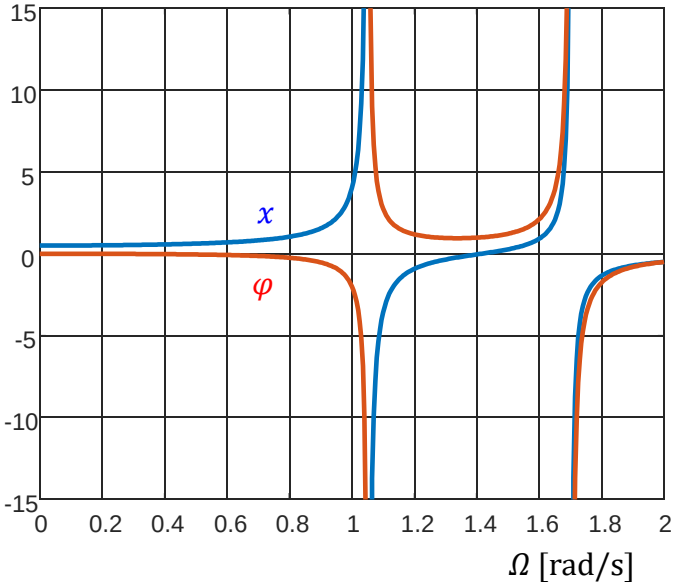
Erregt man das System in Aufgabe 2 durch eine harmonische Kraft $F(t) = F_0 \cos \Omega t$, entstehen harmonische Schwingungen $x(t)$ und $\varphi(t)$ um die Gleichgewichtslage.



a) Welche Kreisfrequenz haben diese harmonischen Schwingungen?

- ☐ Ω
- ☐ 2Ω
- ☐ c/m
- ☐ *hängt von Amplitude ab*

b) Für $m = 1\,\mathrm{kg}$, $r = 1\,\mathrm{m}$, $c = 1\,\mathrm{N/m}$, $F_0 = 1\,\mathrm{N}$ ergibt sich nebenstehender Frequenzgang.



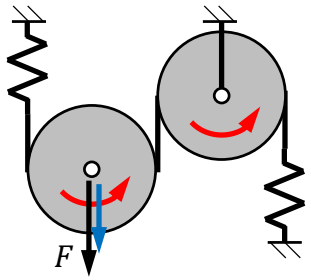
Welche Phänomene lassen sich bei welcher Erregerfrequenz beobachten?

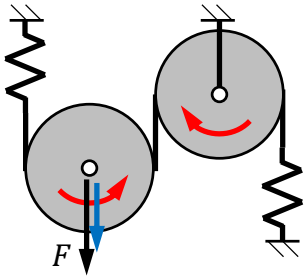
für $\Omega =$ _____ _____

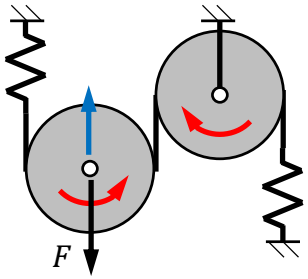
_____

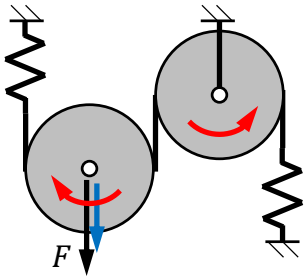
_____

c) Wie schwingt das System für $\Omega = 0.8\,\mathrm{rad/s}$?

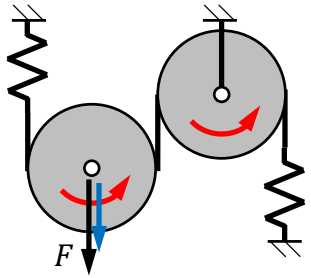
☐ 

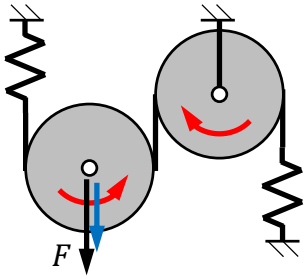
☐ 

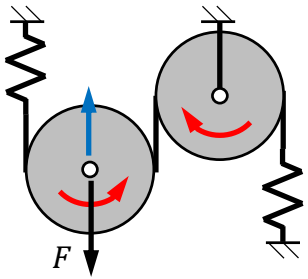
☐ 

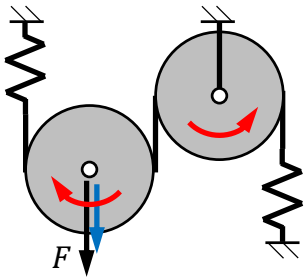
☐ 

d) Wie schwingt das System für $\Omega = 1.2\,\mathrm{rad/s}$?

☐ 

☐ 

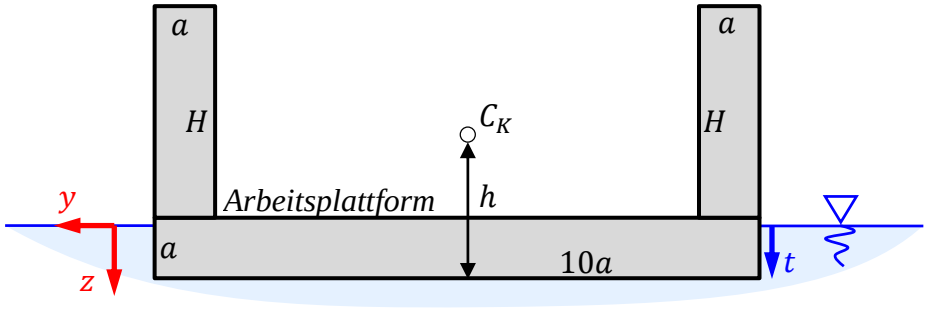
☐ 

☐ 

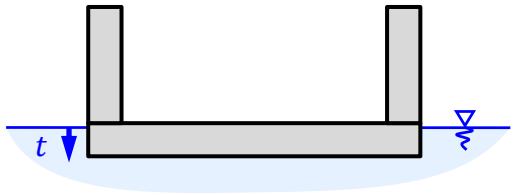
Aufgabe 4 (17 Punkte)

Ein Schwimmdock ermöglicht eine trockene Umgebung für Arbeiten am Unterwasserschiff. Zur Aufnahme des Schiffs wird es durch Fluten der Tanks abgesenkt und anschließend durch Auspumpen der Flutungstanks zusammen mit dem Schiff wieder angehoben.

Im Folgenden soll die Stabilität eines U-förmigen Schwimmdocks (Schwerpunkt C_K, Schwerpunkthöhe h) um die Längsachse untersucht werden. Es besteht aus einem quaderförmigen Boden (Höhe a, Breite $10a$, Länge L) und zwei quaderförmigen Seitenteilen (Höhe H, Breite a, Länge L).



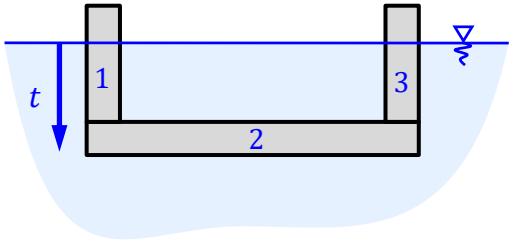
a) Zunächst werden Eintauchtiefen t bis zum Eintauchen der Arbeitsplattform untersucht, d.h. $0 < t < a$. Geben Sie das verdrängte Wasservolumen V, die z–Koordinaten der Schwerpunkte von Schwimmdock (z_K) und verdrängtem Wasservolumen (z_F) sowie das Flächenträgheitsmoment I_x der Schwimmfläche an.



$V =$ _____ , $z_K =$ _____ , $z_F =$ _____ ,

$I_x =$ _____

b) Bestimmen Sie die gleichen Größen für Eintauchtiefen $a < t < a + H$. Machen Sie dazu in der Tabelle zunächst Angaben zu den verdrängten Teilvolumina (Ziffern 1 bis 3) bzgl. Volumen und Schwerpunktkoordinate. Geben Sie zu I_x einen Zwischenschritt an, der Ihre Berechnung nachvollziehbar macht.



i	z_i	V_i	z_iV_i
1			
2			
3			
Σ			

$V =$ _____ , $z_K =$ _____ , $z_F =$ _____ ,

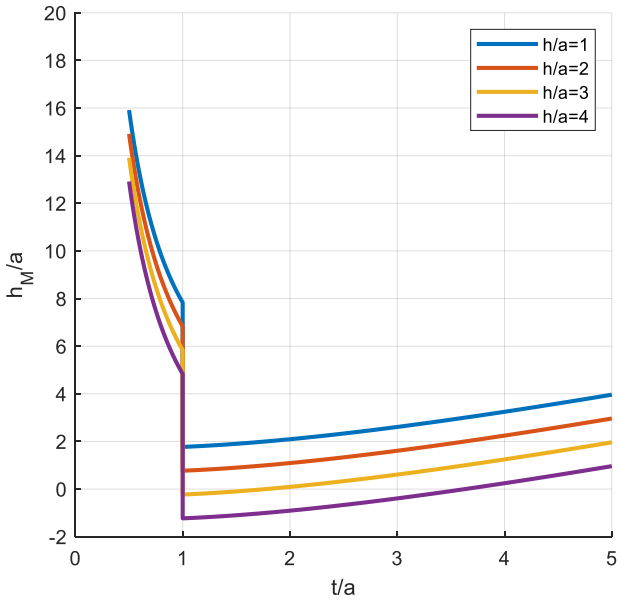
$I_x =$ _____ = _____

c) Wie errechnet sich aus diesen Angaben für die beiden Eintauchfälle jeweils die Metazenterhöhe?

☐ $h_M = \frac{I_x}{V} + z_F - z_K$ ☐ $h_M = \frac{I_x}{V} + z_F + z_K$ ☐ $h_M = \frac{I_x}{V} - z_F + z_K$

d) Das Bild zeigt eine Schar von Kurven für verschiedene Schwerpunkthöhen h, die durch unterschiedliche Beladung des Schwimmdocks entsteht. Jede einzelne Kurve zeigt die Metazenterhöhe h_M in Abhängigkeit der Eintauchtiefe t.

Beschreiben Sie, was passiert, wenn man das Schwimmdock für $h = 4a$ aus einer Tiefe von $t = 5a$ langsam auftauchen lässt.



_____

_____

_____

e) In welchem Bereich muss die Schwerpunkthöhe h liegen, damit der Tauchvorgang über den gesamten Tauchbereich stabil abläuft?

☐ $\frac{h}{a} \leq 2.8$ ☐ $\frac{h}{a} \geq 2.8$ ☐ *generell stabil* ☐ *generell instabil*

f) Welche Situation ist generell besonders kritisch?

☐ *höchste Schwimmposition*

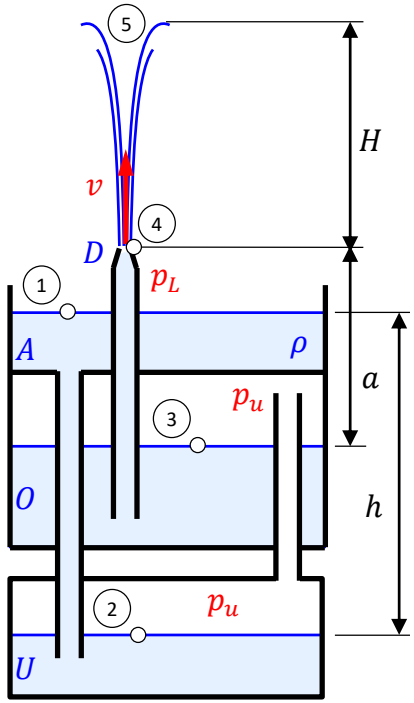
☐ *tiefste Tauchposition*

☐ *Eintauchen der Arbeitsplattform*

☐ *Auftauchen der Arbeitsplattform*

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Der Brunnen des Heron von Alexandria besteht aus zwei geschlossenen Behältern O und U sowie einer Auffangschale A und einer Düse D. Das Wasser (Dichte ρ) strömt von der Auffangschale A in den unteren Behälter U und erzeugt dort den Druck p_u. Dieser ist über eine Luftröhre mit dem oberen Behälter O verbunden, wodurch der Druck dort ebenfalls p_u ist und das Wasser durch die Düse D drückt, wo es mit der Geschwindigkeit v austritt (Luftdruck p_L). Die Wasserstände in den Behältern verändern sich so langsam, dass die Geschwindigkeiten der Wasserspiegel vernachlässigbar sind. Alle Strömungen werden als reibungsfrei betrachtet.



a) Zeichnen Sie eine Stromlinie von Punkt (1) nach (2), formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung und bestimmen Sie p_u.

_____ $\Rightarrow$ $p_u =$ _____

b) Zeichnen Sie eine Stromlinie von Punkt (3) nach (4), formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung und bestimmen Sie die Austrittsgeschwindigkeit v.

_____ $\Rightarrow$ $v =$ _____

c) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung zwischen Düse (4) und höchstem Punkt (5) des Strahls und bestimmen Sie daraus die Spritzhöhe H.

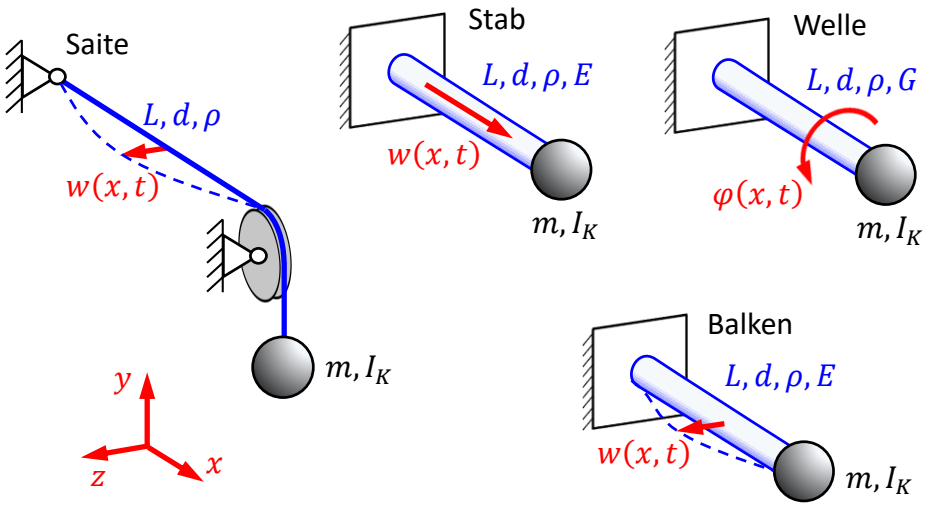
_____ $\Rightarrow$ $H =$ _____

d) Welche Spritzhöhe ergibt sich damit schließlich?

☐ $H = h$ ☐ $H = h + a$ ☐ $H = h - a$

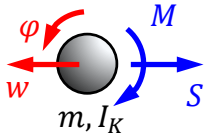
Aufgabe 6 (15 Punkte)

Eine kleine Kugel (Masse m, Massenträgheitsmoment I_K bezüglich ihres Schwerpunkts) wird an unterschiedliche Kontinua angehängt (jeweils Länge L, Durchmesser d, Dichte ρ). Zur Vermeidung von Schwerkrafteinflüssen werden Schwingungen in der horizontalen xz-Ebene betrachtet.



a) Die Kugel führt je nach Anwendungsfall eine translatorische Bewegung $w(t)$ und/oder eine Rotation $\varphi(t)$ aus. Welche Schnittkräfte S und Momente M zwischen Kugel und Kontinuum ergeben sich aus Impuls- und Drallsatz der Kugel bzgl. Ihres Schwerpunkts?

$S =$ _____ , $M =$ _____



b) Wie groß sind axiales Flächenträgheitsmoment I_a und polares Flächenträgheitsmoment I_p der betrachteten Kontinua mit dem kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser d)?

$I_a =$ _____ , $I_p =$ _____

c) Formulieren Sie die partiellen Differentialgleichungen (Dgl) und Randbedingungen (RB) für Querschwingungen $w(x,t)$ der biegeschlaffen Saite mit angehängter Kugel.

Dgl: _____ , RB: _____ , _____

d) Wie lauten die die entsprechenden Gleichungen für die Längsschwingungen $w(x,t)$ des Stabes (Elastizitätsmodul E) mit angeflanschter Kugel?

Dgl: _____ ,

RB: _____ , _____

e) Welche Gleichungen ergeben sich für die Torsionsschwingungen $\varphi(x,t)$ der Welle (Schubmodul G) mit anflanschter Kugel?

Dgl: _____ ,

RB: _____ , _____

f) Durch welche Gleichungen werden Biegeschwingungen $w(x,t)$ des Balkens (Elastizitätsmodul E) mit angeflanschter Kugel beschrieben?

Dgl: _____ ,

RB: _____ , _____ ,

_____ , _____

E N D E