Prüfungsklausur Technische Mechanik III

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 6 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

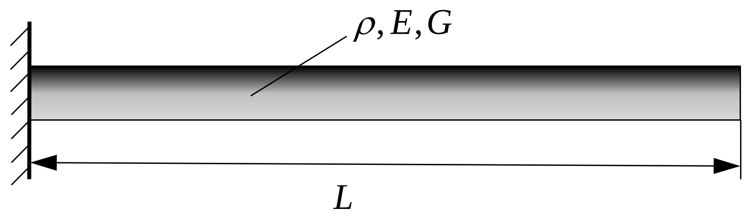
....
.
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Eine Stahlwelle (Länge $L = 0.8\ \mathrm{m}$, Dichte $\rho = 7800\,\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3$, Elastizitätsmodul $E = 210\ \mathrm{GPa}$, Schubmodul $G = 79.3\ \mathrm{GPa}$) ist einseitig fest eingespannt.



a) Wie groß ist die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit für Torsionswellen?

$c =$ ____________ $=$ ____________
(*Formel*) (*Wert*)

b) Welcher Einspannfall liegt hier vor?

☐ fest - fest ☐ fest - frei ☐ frei - frei

c) Wie lautet die charakteristische Gleichung zur Berechnung der Eigenfrequenzen ω im vorliegenden Fall?

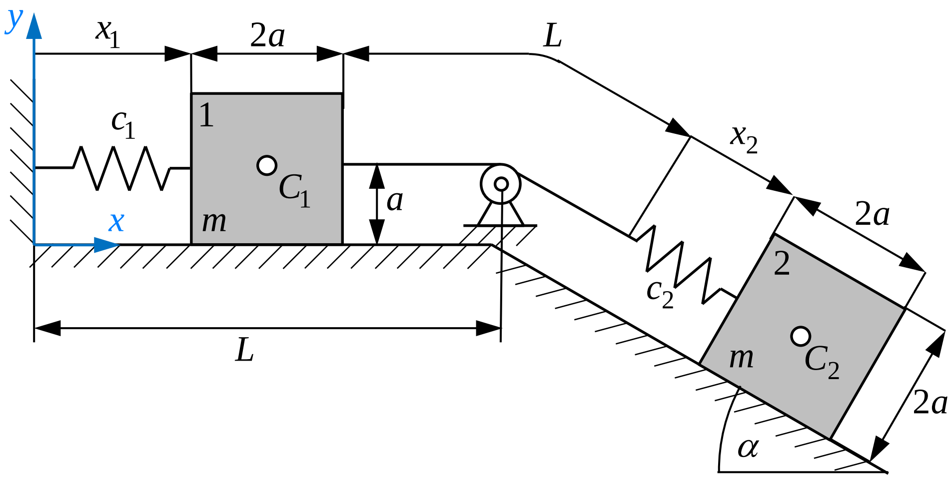
____

d) Bestimmen Sie die Frequenz der ersten Torsionseigenschwingung.

$\omega_1 =$ ____________ $\Rightarrow$ $f_1 =$ ____________

Aufgabe 2 (13 Punkte)

Zwei homogene Körper (jeweils Masse m, Abmessungen $2a \times 2a$) gleiten reibungsfrei auf einer horizontalen bzw. schiefen Ebene (Neigungswinkel α). Körper 1 ist über eine Feder (Steifigkeit c_1) mit der Wand verbunden. Auf der anderen Seite verbindet ein elastisches Seil (Federsteifigkeit c_2, ungespannte Länge L) über eine Umlenkrolle mit vernachlässigbarem Radius die beiden Körper. Die Federn sind für $x_1 = x_2 = 0$ entspannt.

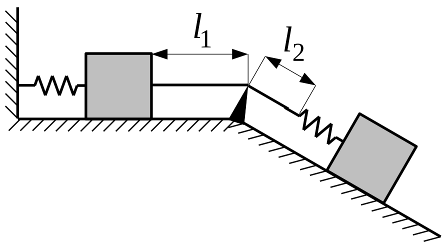


a) Geben Sie bei Vernachlässigung der Umlenkrolle die Längen der beiden Seilabschnitte l_1 und l_2 an.

☐ $l_1 = L - 2a - x_1$, $l_2 = 2a + x_1$

☐ $l_1 = L - 2a - c_1$, $l_2 = 2a - c_1$

☐ $l_1 = c_1 + 2a + x_1$, $l_2 = L - x_2$



b) Bestimmen Sie die Ortsvektoren zu den Schwerpunkten der beiden Körper.

$\mathbf{r}_1 = \left[\quad \right]$, $\mathbf{r}_2 = \left[\quad \right]$

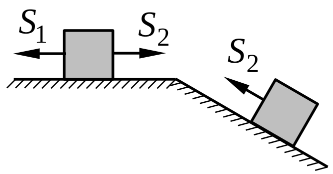
c) Wie lauten die virtuellen Verschiebungen des Systems?

$\delta\mathbf{r}_1 = \left[\quad \right]$, $\delta\mathbf{r}_2 = \left[\quad \right]$

d) Wie groß sind die Federkräfte S_1 und S_2 in Anhängigkeit der Auslenkungen x_1 und x_2?

$S_1 =$ ______________

$S_2 =$ ______________



e) Welche eingeprägten Kräfte wirken auf die beiden Körper?

$\mathbf{f}_1^e = \left[\quad \right]$, $\mathbf{f}_2^e = \left[\quad \right]$

f) Wie groß ist die virtuelle Arbeit der eingeprägten Kräfte?

☐ $\delta W^e = (2c_2 x_2 + 2mg\sin\alpha) \quad \delta x_1 \delta x_2$

☐ $\delta W^e = (mg\sin\alpha - c_1 x_1)\delta x_1 + (mg\sin\alpha - c_2 x_2)\delta x_2$

☐ $\delta W^e = mg\sin\alpha\ (\delta x_1 + \delta x_2)$

☐ $\delta W^e = c_1 x_1 \delta x_1 + c_2 x_2 \delta x_2$

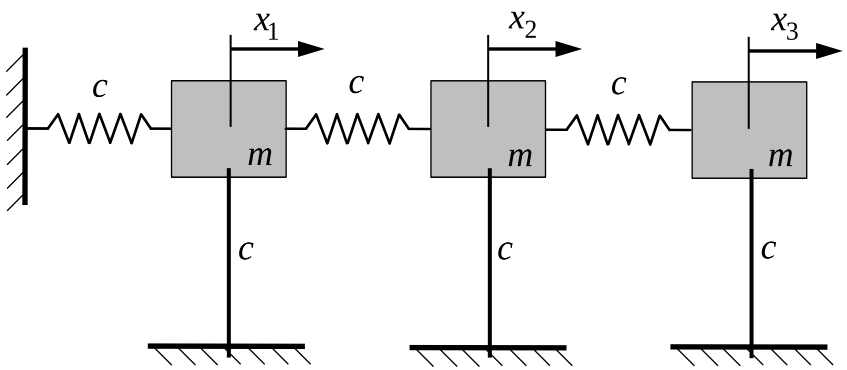
g) Bestimmen Sie die Gleichgewichtslage des Systems.

$x_1 =$ __________ , $x_2 =$ __________

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Drei Komponenten (jeweils Massenpunkte mit Masse m) einer Maschinenkonstruktion sind über Federn (Steifigkeit c) verbunden und auf Biegefedern (Steifigkeit c) montiert. Die Lagrange-Funktion lautet

$$L=\frac{1}{2}m\left(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2+\dot{x}_3^2\right)-\frac{1}{2}c\left(2x_1^2+\left(x_2-x_1\right)^2+x_2^2+\left(x_3-x_2\right)^2+x_3^2\right).$$



a) Bilden Sie folgende Ableitungen:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=\text{\_\_\_\_},\qquad \frac{\partial L}{\partial x_1}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}=\text{\_\_\_\_},\qquad \frac{\partial L}{\partial x_2}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_3}=\text{\_\_\_\_},\qquad \frac{\partial L}{\partial x_3}=\text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_}$$

b) Ergänzen Sie die Elemente in der Bewegungsgleichung.

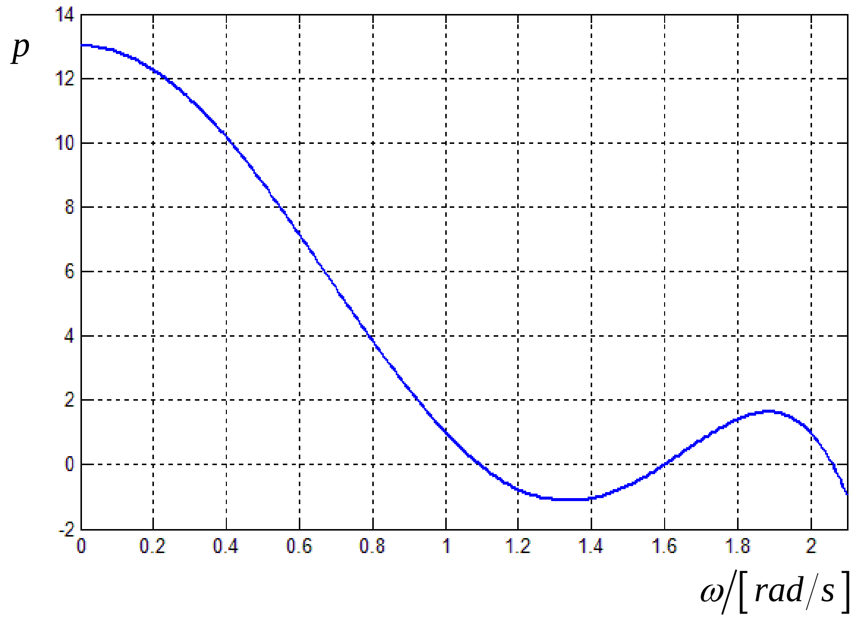
$$\begin{bmatrix}\text{\_\_\_} & \text{\_\_\_} & \text{\_\_\_}\\ \text{\_\_\_} & \text{\_\_\_} & \text{\_\_\_}\\ \text{\_\_\_} & \text{\_\_\_} & \text{\_\_\_}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\text{\_\_\_\_\_} & \text{\_\_\_\_\_} & \text{\_\_\_\_\_}\\ \text{\_\_\_\_\_} & \text{\_\_\_\_\_} & \text{\_\_\_\_\_}\\ \text{\_\_\_\_\_} & \text{\_\_\_\_\_} & \text{\_\_\_\_\_}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

c) Wie berechnet sich die charakteristische Gleichung der Eigenschwingungen?

☐ $p(\omega)=\det\left(\boldsymbol{M}\omega^2+\boldsymbol{K}\right)=0$ ☐ $p(\omega)=\det\left(\boldsymbol{K}\omega^2+\boldsymbol{M}\right)=0$

☐ $p(\omega)=\det\left(-\boldsymbol{M}\omega^2+\boldsymbol{K}\right)=0$ ☐ $p(\omega)=\det\left(-\boldsymbol{K}\omega^2+\boldsymbol{M}\right)=0$

d) Das nachstehende Bild zeigt das charakteristische Polynom für $m=1\ \mathrm{kg}$ und $c=1\ \mathrm{N/m}$.

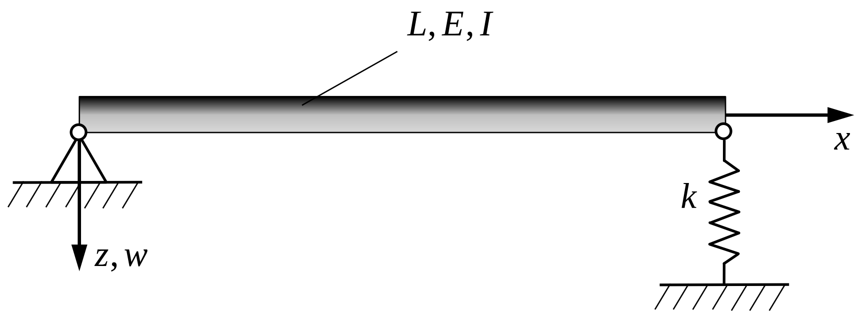


Ermitteln sie daraus die drei Eigenfrequenzen.

$\omega_1=$ _________, $\omega_2=$ _________, $\omega_3=$ _________

Aufgabe 4 (15 Punkte)

Im Folgenden sollen die Biegeschwingungen eines Balkens (Länge L, Elastizitätsmodul E, Flächenträgheitsmoment I) untersucht werden. Der Balken ist auf der einen Seite gelenkig gelagert und auf der anderen Seite durch eine Feder (Steifigkeit k) abgestützt.



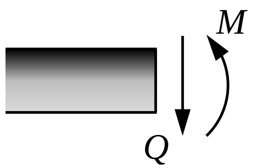
a) Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Durchbiegung w und Querkraft Q bzw. Biegemoment M am freien Rand?

☐ $Q = -EIw''$ ☐ $M = -EIw''$

☐ $Q = EIw''$ ☐ $M = EIw''$

☐ $Q = -EIw'''$ ☐ $M = -EIw'''$

☐ $Q = EIw'''$ ☐ $M = EIw'''$



b) Formulieren Sie die Randbedingungen der Biegeschwingungen $w(x,t)$.

__________________, __________________

__________________, __________________

c) Wie lautet der allgemeine Ansatz für die Eigenschwingungsformen $W(x)$ des Biegebalkens?

☐ $W(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$

☐ $W(x) = Ae^{Bx} + Ce^{-Dx}$

☐ $W(x) = A\cos\gamma x + B\sin\gamma x + C\cosh\gamma x + D\sinh\gamma x$

☐ $W(x) = A + Bx + C\sin x + D\cos x$

d) Bilden Sie folgende Ableitungen:

$W'(x) =$ ____________________________________

$W''(x) =$ ____________________________________

$W'''(x) =$ ____________________________________

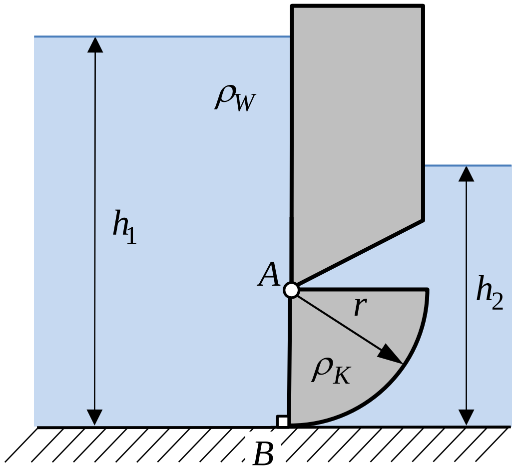
e) Formulieren Sie mit Hilfe der Randbedingungen Gleichungen für die freien Konstanten der Ansatzfunktion $W(x)$ und bündeln Sie diese in einem Gleichungssystem. Verwenden Sie dazu folgende Abkürzungen:

$$s = \sin\gamma L,\quad c = \cos\gamma L,\quad sh = \sinh\gamma L,\quad ch = \cos\gamma L,\quad \kappa = \frac{k}{EI\gamma^3}.$$

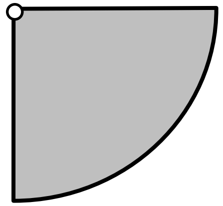
$$\begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \\ \quad & \quad & \quad & \quad \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Aufgabe 5 (13 Punkte)

Zwei Behälter sind unterschiedlich hoch mit Wasser (Dichte ρ_W) gefüllt und durch eine in A drehbar gelagerte Klappe (Viertelkreis mit Radius r, Kanalbreite b, Dichte ρ_K) getrennt. Die geschlossene Klappe stützt sich im Kontaktpunkt B mit der Normalkraft N gegen einen Anschlag.

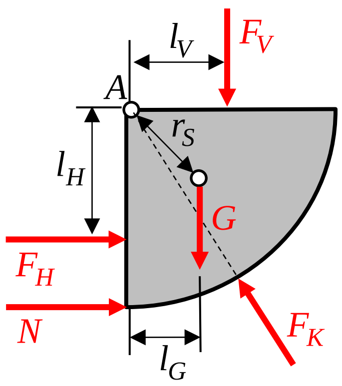


a) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf des resultierenden Wasserdrucks auf die geschlossene Klappe.



b) Das nebenstehende Bild zeigt die auf die Klappe wirkenden Kräfte, wobei F_V, F_H und F_K aus dem Wasserdruck resultieren und G das Gewicht der Klappe ist. Bilden Sie das Momentengleichgewicht aller Kräfte auf die Klappe bezüglich des Gelenks A.

Hinweis: $r_S = 8r/\left(3\sqrt{2}\pi\right)$



____

c) Wie groß ist die Normalkraft, wenn die Klappe gerade öffnet?

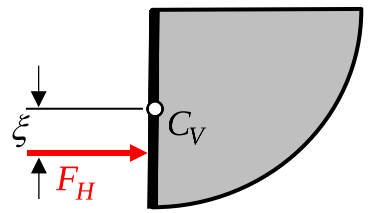
☐ $N < 0$ ☐ $N = 0$ ☐ $N > 0$

d) Welchen Abstand hat der Druckpunkt der vertikalen Klappenfläche von ihrem Flächenmittelpunkt?

☐ $\xi = \dfrac{r^2}{12\left(h_1 - r/2\right)}$

☐ $\xi = \dfrac{r}{12\left(h_1 - r/2\right)}$

☐ $\xi = \dfrac{r^2}{12\left(h_1 + r/2\right)}$



e) Im Folgenden sollen die auf die Klappe wirkenden Kräfte und deren Angriffspunkte bestimmt werden.

Gewichtskraft und Hebelarm:

$G =$ __________ , $l_G =$ __________

vertikale Kraft und Hebelarm:

$F_V =$ ________________ , $l_V =$ __________

horizontale Kraft und Hebelarm:

$F_H =$ ________________ , $l_H =$ __________

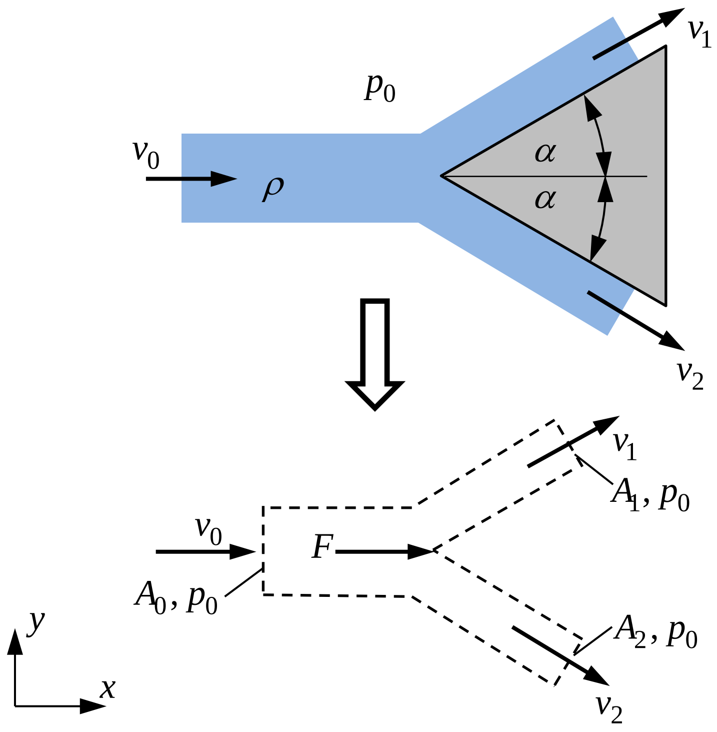
f) Wie groß muss die Dichte ρ_K der Klappe sein, damit diese sich bei $h_1 = 2h_2$ gerade öffnet?

☐ $\rho_K = \left(2h_2 + 3r\right)\rho_W$ ☐ $\rho_K = \left(1 + \dfrac{3h_2}{2r}\right)\rho_W$

☐ $\rho_K = \left(2r - 3h_2\right)\rho_W$ ☐ $\rho_K = \left(\dfrac{3h_2}{2r} - 1\right)\rho_W$

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Ein horizontaler Wasserstrahl (Querschnittsfläche A_0, Geschwindigkeit v_0, Dichte ρ) trifft auf eine Schneide und teilt sich. Beide Teilstrahlen werden reibungsfrei um den Winkel α abgelenkt. Die Strömung erzeugt die Kraft F auf die Schneide.



a) Wie heißen folgende Gleichungen?

$$\rho\frac{v_2^2}{2} + p_2 = \rho\frac{v_1^2}{2} + p_1$$ ________________________

$$\boldsymbol{F} = \dot{m}_1\boldsymbol{v}_1 + \dot{m}_2\boldsymbol{v}_2 - \dot{m}_0\boldsymbol{v}_0$$ ________________________

$$A_1 v_1 + A_2 v_2 = A_0 v_0$$ ________________________

b) Formulieren Sie den Impulssatz für das gestrichelte Kontrollvolumen in x- und y-Richtung. (Hinweis: zunächst dürfen die Größen $\dot{m}_i$ und v_i benutzt werden)

____

____

c) Wie groß sind die Massenströme des Ausgangsstrahls und der Teilstrahlen? (Hinweis: zunächst dürfen die Größen v_i und A_i benutzt werden)

$\dot{m}_0 =$ ________, $\dot{m}_1 =$ ________, $\dot{m}_2 =$ ________

d) Welche Geschwindigkeiten v_1 und v_2 der Teilstrahlen ergeben sich aus der Bernoulli-Gleichung?

$v_1 =$ ________, $v_2 =$ ________

e) Welche Querschnitte der Teilstrahlen ergeben sich aus der Kontinuitätsgleichung und dem Impulssatz in y-Richtung?

$A_1 =$ ________, $A_2 =$ ________

f) Welche Schneidenkraft F resultiert aus dem Impulssatz in x-Richtung?

☐ $F = (\cos\alpha - 1)\rho A_0 v_0^2$ ☐ $F = \rho A_0 v_0^2 \cos\alpha$

☐ $F = (\cos\alpha - 1) A_0 v_0^2$ ☐ $F = (1 - \sin\alpha)\rho A_0 v_0^2$

ENDE