Prüfungsklausur Technische Mechanik III

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 7 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

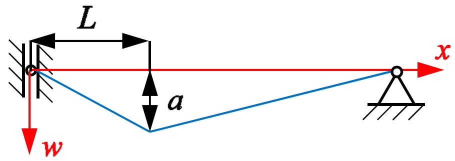
....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

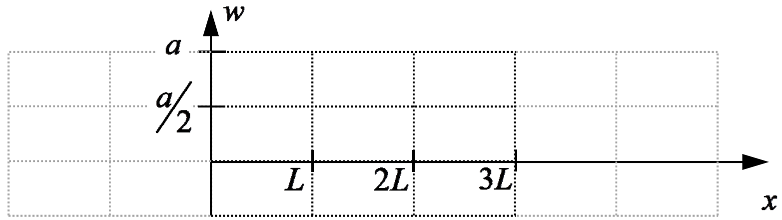
Punkte	Note	

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Eine Saite (Länge $3L$, Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c) ist linksseitig frei und rechtsseitig fest gelagert. Sie wird an der Stelle $x = L$ um a ausgelenkt.

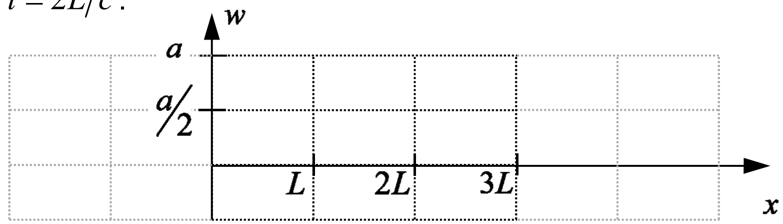


a) Welche Halbwellen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ ergeben sich zum Zeitpunkt $t = 0$ durch Loslassen aus der Ruhe?



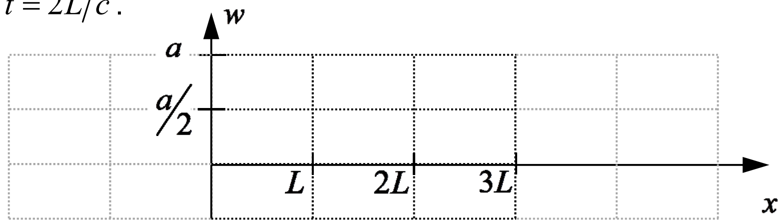
$t = 0$

b) Konstruieren Sie die rechtslaufende Halbwelle $f_1(x - ct)$ zum Zeitpunkt $t = 2L/c$.



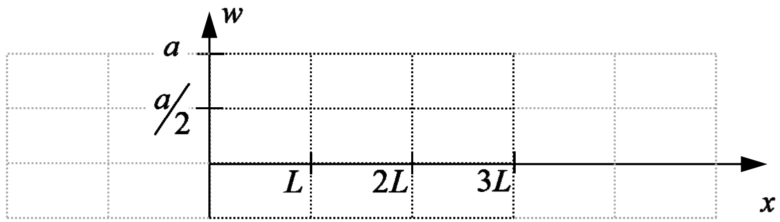
$t = \frac{2L}{c}$

c) Konstruieren Sie die linkslaufende Halbwelle $f_2(x + ct)$ zum Zeitpunkt $t = 2L/c$.



$t = \frac{2L}{c}$

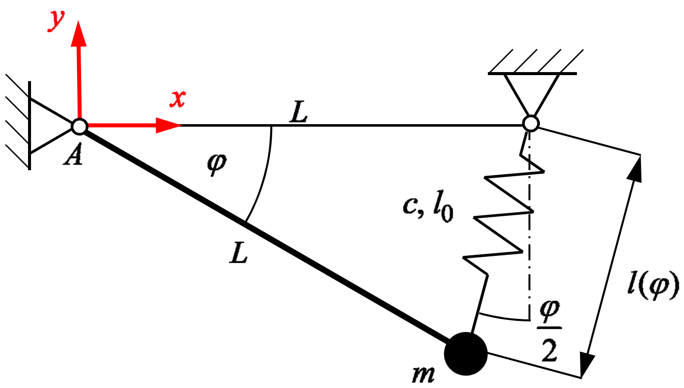
d) Superponieren Sie die Halbwellen zu $w(x, 2L/c)$.



$t = \frac{2L}{c}$

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Ein Punktpendel (Drehpunkt A, Länge L, Masse m) wird zusätzlich mit einer Feder (Federkonstante c, ungespannte Federlänge l_0) gehalten.



a) Beschreiben Sie die Gewichtskraft $\vec{G}$ und die Federkraft $\vec{F}$ im Koordinatensystem.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

b) Wie lautet der Ortsvektor zur Pendelmasse m?

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

c) Wie berechnet sich die virtuelle Verschiebung?

☐ $\delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}\,\delta\varphi$ ☐ $\delta\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial\boldsymbol{r}}\delta\boldsymbol{r}$ ☐ $\delta\boldsymbol{r} = \delta\varphi$ ☐ $\delta\boldsymbol{r} = \dfrac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\varphi}\delta\varphi$

d) Berechnen Sie die virtuelle Verschiebung der Pendelmasse aufgrund einer Winkelvariation $\delta\varphi$.

$$\delta\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \\ \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \end{bmatrix}$$

e) Wie groß ist die virtuelle Arbeit aller eingeprägten Kräfte?

$\delta W^e =$ ______________________________________

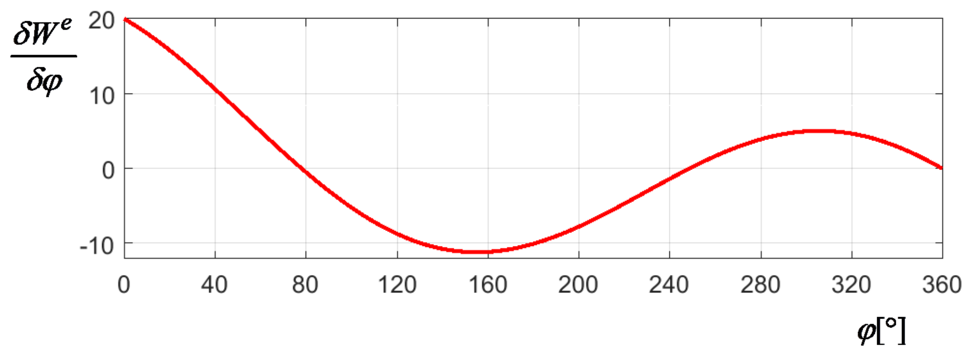
____

f) Wie berechnet sich die aktuelle Federlänge für $0 \le \varphi \le 2\pi$?

☐ $l(\varphi) = L\sqrt{2(1-\sin\varphi)}$ ☐ $l(\varphi) = 2L\sin\dfrac{\varphi}{2}$

☐ $l(\varphi) = 2L\tan\varphi$ ☐ $l(\varphi) = \dfrac{2L}{\sin\varphi}$

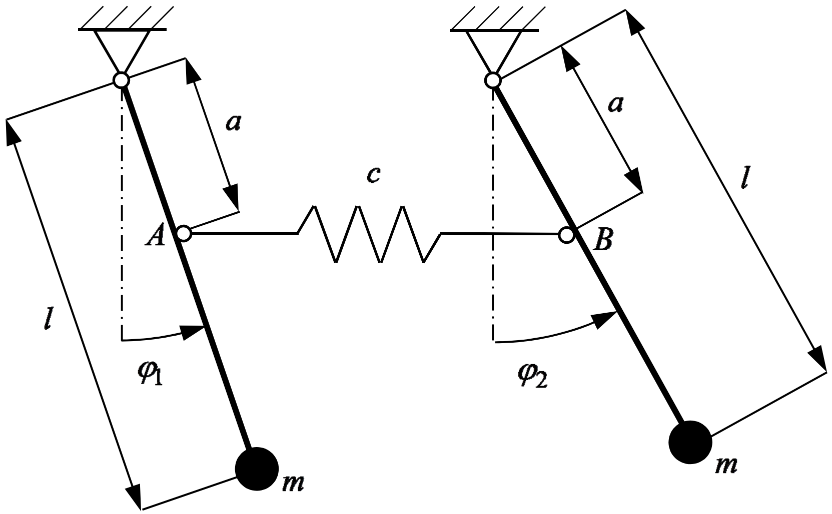
g) Untenstehendes Bild zeigt das Verhalten $\delta W^e / \delta\varphi$ für $l_0 = L$ und $cL = mg = 10$. Für welche Winkel φ ist Gleichgewicht möglich?



Gleichgewicht für $\varphi \in \{$ ________________ $\}$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Zwei Punktpendel (jeweils Länge l, Masse m) sind durch eine Feder (Angriffshebel a, Federkonstante c, Feder für $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$ entspannt) an den Punkten A und B miteinander gekoppelt.



a) Wie groß ist die potentielle Energie der Feder, wenn dabei nur die horizontalen Auslenkungen der Punkte A und B berücksichtigt werden?

$U_F =$ ______________________________________

b) Welche potentielle Energie ergibt sich aus der Gravitation?

$U_m =$ ______________________________________

c) Wie groß ist die kinetische Energie des Gesamtsystems?

$T =$ ______________________________________

d) Wie lautet die Lagrange-Funktion des Systems?

☐ $L = \frac{1}{2} ml^2 \left(\dot{\varphi}_1^2 + \dot{\varphi}_2^2 \right) - \frac{ca^2}{2} \left(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \right)^2 + mgl(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2)$

☐ $L = 2ml^2 \left(\sin\dot{\varphi}_1 + \sin\dot{\varphi}_2 \right) + ca^2 \left(\varphi_1 + \varphi_2 \right)^2 + mgl(\varphi_1 + \varphi_2)$

☐ $L = ml^2 \left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 \right)^2 + ca^2 \left(\cos\varphi_1^2 - \cos\varphi_2^2 \right)$

☐ $L = ml^2 \left(\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 \right)^2 + ca^2 \left(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2 \right)^2 + mgl(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)$

e) Bilden Sie folgende Ableitungen:

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} =$ ____________ , $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) =$ ______________

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} =$ ____________ , $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) =$ ______________

$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} =$ ____________________________________

$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} =$ ____________________________________

f) Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf.

____

____

Aufgabe 4 (13 Punkte)

Die linearisierten Bewegungsgleichungen aus Aufgabe 3 lauten

$$\begin{bmatrix} ml^2 & 0 \\ 0 & ml^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ca^2+mgl & -ca^2 \\ -ca^2 & ca^2+mgl \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{bmatrix}=\mathbf{0}\,.$$

a) Wie berechnet sich die charakteristische Gleichung für die Eigenfrequenzen ω des Pendelsystems?

$$\det\begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}=0$$

b) Stellen Sie die charakteristische Gleichung des vorliegenden Problems auf.

$$\left(\_\_\_\_\_\right)\omega^4+\left(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\right)\omega^2$$

$$+\left(\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\right)=0$$

c) Für geeignete Zahlenwerte ergibt sich die charakteristische Gleichung

$$5\omega^4-50\omega^2+45=0$$

Bestimmen Sie die Eigenfrequenzen.

Rechnung:

Ergebnis: $\omega_1 =$ ______, $\omega_2 =$ ______

d) Für die Eigenvektoren findet man

$$\tilde{\boldsymbol{y}}_1=c_1\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix},\qquad \tilde{\boldsymbol{y}}_2=c_2\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Wie lautet die Bedingung für massenorthogonale Eigenvektoren?

☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T\boldsymbol{K}\tilde{\boldsymbol{y}}_k=1$ ☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{y}}_k=0$ ☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{y}}_k=\boldsymbol{M}$ ☐ $\tilde{\boldsymbol{y}}_k^T\boldsymbol{M}\tilde{\boldsymbol{y}}_k=1$

e) Formulieren Sie diese Normierungsgleichungen für die beiden Eigenvektoren und bestimmen Sie jeweils die freien Konstanten.

Normierung des ersten Eigenvektors y_1:

____

$\Rightarrow \quad c_1 =$ ______

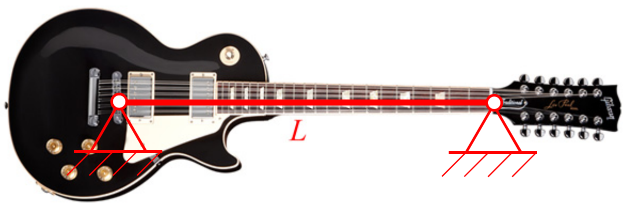
Normierung des zweiten Eigenvektors y_2:

____

$\Rightarrow \quad c_2 =$ ______

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Die Saite (Dichte ρ, Spannung σ) einer E-Gitarre liegt auf Steg und Sattel fest auf. Deren Abstand bezeichnet man als Mensur, welche der Schwinglänge L der Saite entspricht.



Note	Frequenz
G5	783,99 Hz
H4	493,88 Hz
G4	392,00 Hz
H3	246,94 Hz
G3	196,00 Hz
D3	146,83 Hz
A2	110,00 Hz
E2	82,41 Hz

a) Wie ergeben sich im vorliegenden Fall die Eigenfrequenzen?

☐ $\omega_k = k\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$ ☐ $\omega_k = \frac{2k-1}{2}\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}}$

☐ $\omega_k = \frac{2k-1}{2}\frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{\rho}{\sigma}}$

b) Welcher Zusammenhang besteht zwischen Eigenfrequenz ω_k (in $\mathrm{rad/s}$) und hörbarer Schwingungsfrequenz f_k (in Hz)?

☐ $\omega_k = 2\pi/f_k$ ☐ $\omega_k = f_k/2\pi$ ☐ $\omega_k = 2\pi f_k$

c) Welche Spannung σ muss eine Stahlsaite ($\rho = 7850\ \mathrm{kg/m^3}$) mit einer Mensur $L = 648\,mm$ haben, damit ihre Grundfrequenz f_1 auf die Note G3 (siehe Tabelle) gestimmt ist?

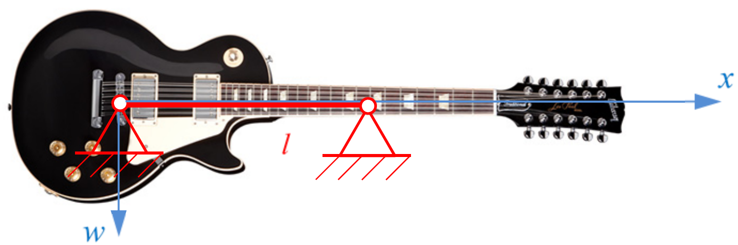
$\sigma =$ ____________ $=$ _______

$(Formel)$ $(Wert)$

d) Welche zusätzliche Note hört man, wenn außerdem die zweite Eigenform mitschwingt?

$f_2 =$ _______ $\hat{=}$ *Note* _______

e) Welche Frequenzverhältnisse ergeben sich gegenüber der vollen Länge, wenn nun die Saite durch Greifen auf die Länge l verkürzt wird?



☐ $\frac{f_k(l)}{f_k(L)} = \frac{L}{l}$ ☐ $\frac{f_k(l)}{f_k(L)} = \frac{l}{L}$ ☐ $\frac{f_k(l)}{f_k(L)} = k\frac{l}{L}$ ☐ $\frac{f_k(l)}{f_k(L)} = k\frac{L}{l}$

f) Auf welche Länge l muss die Gitarrensaite durch Greifen verkürzt werden, um mit ihrer ersten Schwingungseigenform die Note H4 zu treffen?

$l =$ _______

g) Wie lautet die Differentialgleichung für die Saitenschwingung $w(x,t)$?

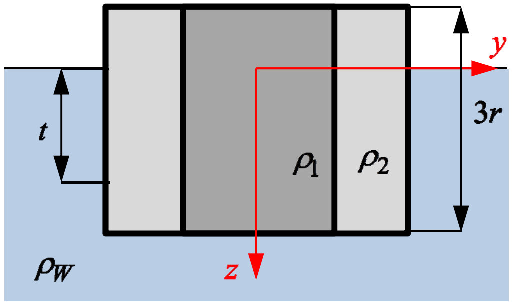
____

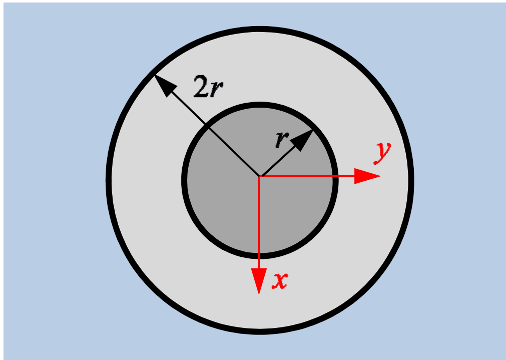
h) Formulieren Sie die Randbedingungen für die gegriffene Saite.

____________, ____________

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Ein Schwimmkörper (Höhe $3r$) besteht aus einem homogenen Kernzylinder (Durchmesser r, Dichte ρ_1) und einem homogenen Ring (Außendurchmesser $2r$, Dichte ρ_2). Er schwimmt im Wasser (Dichte ρ_W) mit der Eintauchtiefe t.





a) Wie groß ist die Masse des Schwimmkörpers und wo liegt sein Schwerpunkt?

$m_K =$ ____________ ,

$z_K =$ ____________

b) Wie groß ist das Volumen der verdrängten Flüssigkeit und wo liegt dessen Mittelpunkt?

$V_F =$ ____________ , $z_F =$ ____________

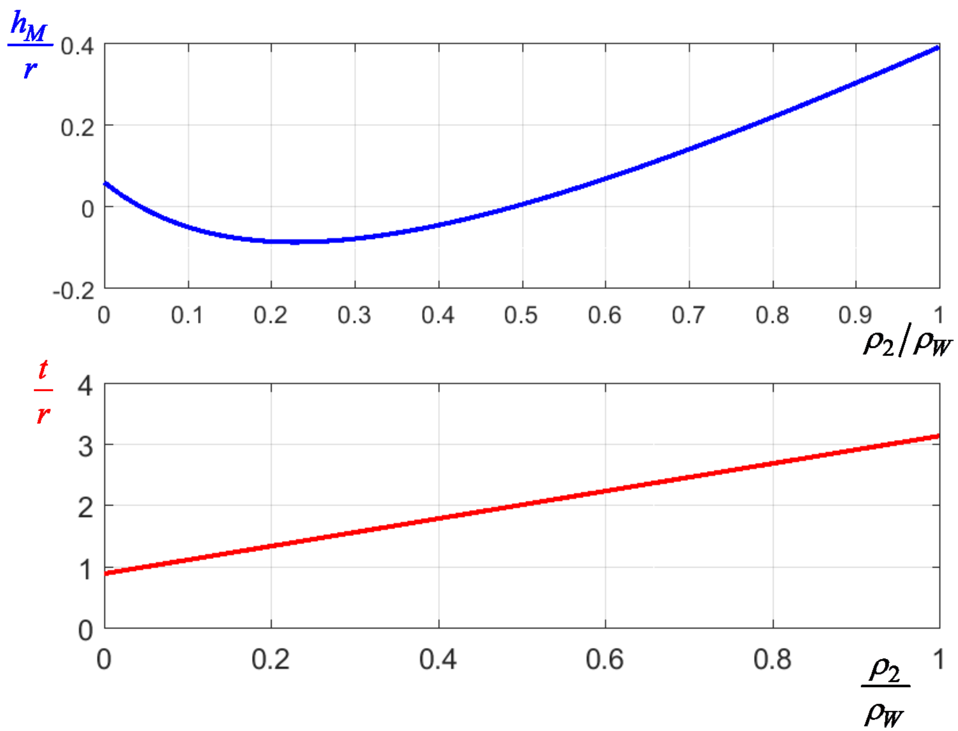
c) Bestimmen Sie das axiale Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche.

$I =$ _______

d) Berechnen Sie die Eintauchtiefe des Schwimmkörpers.

$t =$ ____________

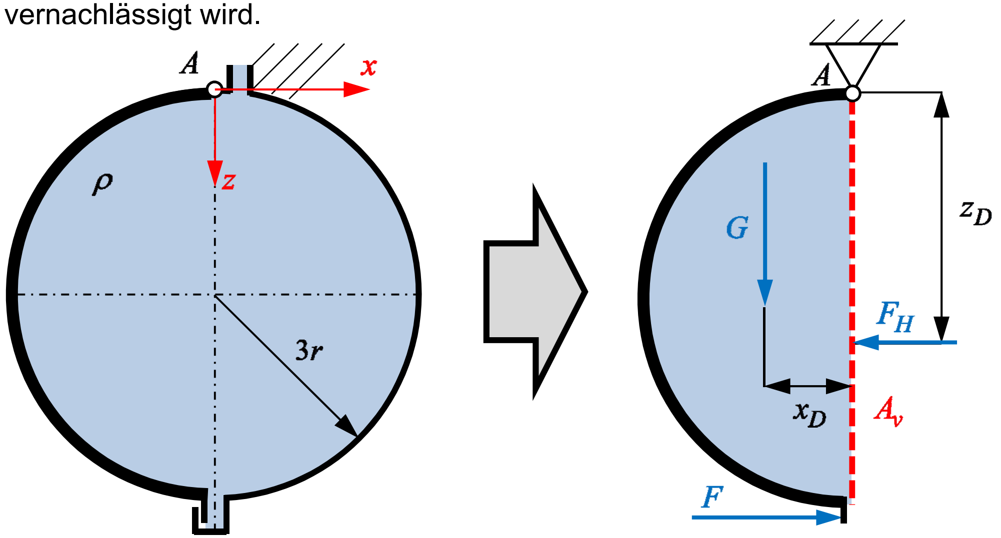
e) Für $\rho_1 = 1.2\,\rho_W$ erhält man in Abhängigkeit der Ringdichte ρ_2 folgende Verläufe für die Metazenterhöhe h_M und die Eintauchtiefe t. In welchen Bereichen darf ρ_2 liegen, damit der Schwimmkörper stabil schwimmt?



______ $\le \dfrac{\rho_2}{\rho_W} \le$ ______ *und* ______ $\le \dfrac{\rho_2}{\rho_W} \le$ ______

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Der oben offene Tank eines Löschhubschraubers (liegender Zylinder mit Radius $3r$, Länge $12r$) ist vollständig mit Wasser (Dichte ρ) befüllt. Er lässt sich halbseitig durch eine Klappe (Gelenkachse A) öffnen und wird durch eine Kraft F verschlossen gehalten. Für deren Bestimmung werden die Kräfte des halben Ausschnitts betrachtet, wobei die Masse der Klappe vernachlässigt wird.



a) Formulieren Sie das Momentengleichgewicht für den Zylinderausschnitt um Punkt A und bestimmen Sie die Haltekraft F.

____

$\Rightarrow F =$ _____________________________________

b) Geben Sie die vertikale Schnittfläche A_v, den dazugehörigen Flächenmittelpunkt und das Flächenträgheitsmoment I_{yA} bzgl. Punkt A an.

$A_v =$ _______ , $z_C =$ _______ , $I_{yA} =$ _______

c) Berechnen Sie die sich aus dem Wasserdruck ergebende Kraft und die z-Koordinate des Druckpunkts auf die vertikale Schnittfläche.

$F_H =$ ___________ , $z_D =$ _______

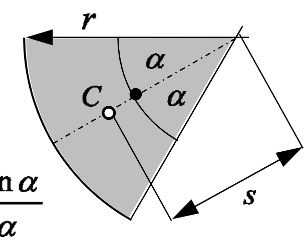
d) Wie groß ist die Gewichtskraft des Wasserausschnitts?

$G =$ ___________

e) Berechnen Sie den Abstand zwischen Gelenkpunkt A und Wirkungslinie der Gewichtskraft.

$x_D =$ _______

Hinweis zum Flächenmittelpunkt eines Kreisausschnitts:



$$s = \frac{2}{3} r \frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

f) Welche Kraft F ist erforderlich, um die Klappe geschlossen zu halten?

- ☐ $F = \frac{3}{2}\rho g r^3$
- ☐ $F = \frac{153}{2}\rho g r^3$
- ☐ $F = 108\rho g r^3$
- ☐ $F = 70\rho g r^3$

ENDE