Prüfungsklausur Technische Mechanik III

Familienname, Vorname	
Matrikel-Nummer	Fachrichtung

1. Die Prüfung umfasst 6 Aufgaben auf 7 Blättern.
2. Nur vorgelegte Fragen beantworten, keine Zwischenrechnungen eintragen.
3. Alle Ergebnisse sind grundsätzlich in den **gegebenen** Größen auszudrücken.
4. Die Blätter der Prüfung dürfen nicht getrennt werden.
5. Zugelassene Hilfsmittel: Fachliteratur, eigene Aufzeichnungen, Taschenrechner. Mobiltelefone müssen ausgeschaltet sein!
6. Bearbeitungszeit: 90 min
7. Unterschreiben Sie die Prüfung bitte **erst** beim Eintragen Ihres Namens in die Sitzliste.

....
(Unterschrift)

Gesamtpunktzahl: 72
zum Bestehen erforderlich: 36

Punkte	Note	

Aufgabe 1 (4 Punkte)

ρ, E, A, L, I

Bei rotierenden Maschinen müssen Rotorwellen so biegesteif sein, dass ihre Eigenfrequenzen über einer vorgegebenen Frequenz liegen, welche durch die Betriebsdrehzahl vorgegeben ist. Ansonsten können Resonanzen bei den biegekritischen Drehzahlen auftreten. Im vorliegenden Fall soll eine freie Welle (Dichte ρ, Elastizitätsmodul E, Querschnittsfläche A, Länge L, axiales Flächenträgheitsmoment I) untersucht werden.

a) Wie groß ist die niedrigste Biegeeigenfrequenz der freien Welle?

$\omega_1 =$ _______________

b) Wie groß ist die maximale Länge, so dass alle Eigenfrequenzen über einer vorgegebenen Frequenz ω_0 liegen, d.h. $\omega_1 \geq \omega_0$?

$L \leq$ _______________

c) Für die Welle stehen zwei unterschiedliche Materialien zur Verfügung: eines mit Dichte ρ_1 und Elastizitätsmodul E_1, das andere mit ρ_2, E_2. In welchem Verhältnis stehen die jeweils maximalen Längen L_1 und L_2 zueinander?

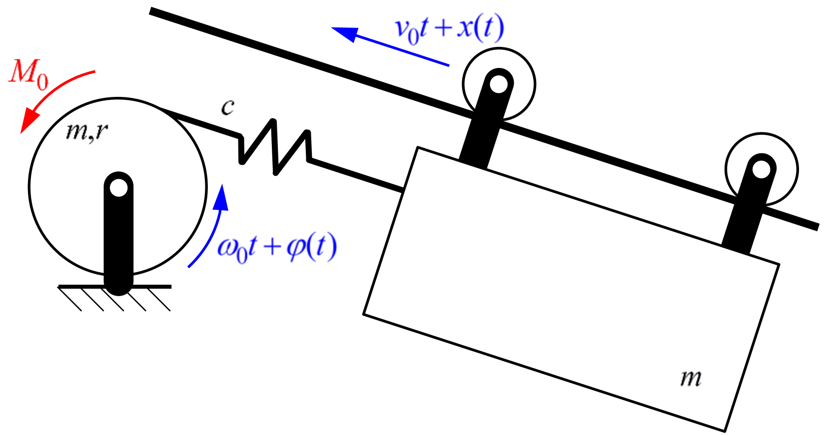
$\frac{L_2}{L_1} =$ _______________

d) Welches Verhältnis ergibt sich für Wellen einerseits aus hochfestem Kohlefaserverbundwerkstoff ($\rho_{CFK} = 1800\ \mathrm{kg/m^3}, E_{CFK} = 380\ \mathrm{GPa}$) und andererseits aus Stahl ($\rho_{St} = 7800\ \mathrm{kg/m^3}, E_{St} = 210\ \mathrm{GPa}$)?

☐ $\frac{L_{CFK}}{L_{St}} = 0.60$ ☐ $\frac{L_{CFK}}{L_{St}} = 1$ ☐ $\frac{L_{CFK}}{L_{St}} = 1.67$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Eine Seilbahn (Masse m) wird an einem elastischen Seil (Steifigkeit c) hinaufgezogen. Der Antrieb wirkt mit konstantem Moment M_0 auf die Seiltrommel (homogene zylindrische Walze, Masse m, Radius r).



Durch Störungen überlagern sich der stationären Bewegung Schwingungen $\mathbf{y}(t) = [\varphi(t) \quad x(t)]^T$. Diese werden mit entsprechenden Zahlenwerten und Normierung durch die Bewegungsgleichung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \ddot{\mathbf{y}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 600 & -600 \\ -600 & 600 \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \mathbf{y} = \mathbf{0}$$

beschrieben. Eine Eigenwertanalyse liefert die die beiden Eigenvektoren

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 2b \\ -b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

a) Wie lautet die Modalmatrix mit den oben angegebenen, zunächst nicht normierten Eigenvektoren?

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

b) Berechnen Sie folgende Matrizenprodukte:

$$\mathbf{Y}^T\mathbf{M}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}^T\mathbf{K}\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix}$$

c) Für welche Werte von a und b sind die Eigenvektoren massenorthogonal?

$a =$ _____, $b =$ _____

d) Wie lautet mit diesen Werten die Bewegungsgleichung nach einer Modaltransformation $\mathbf{y} = \mathbf{Y}\hat{\mathbf{y}}$?

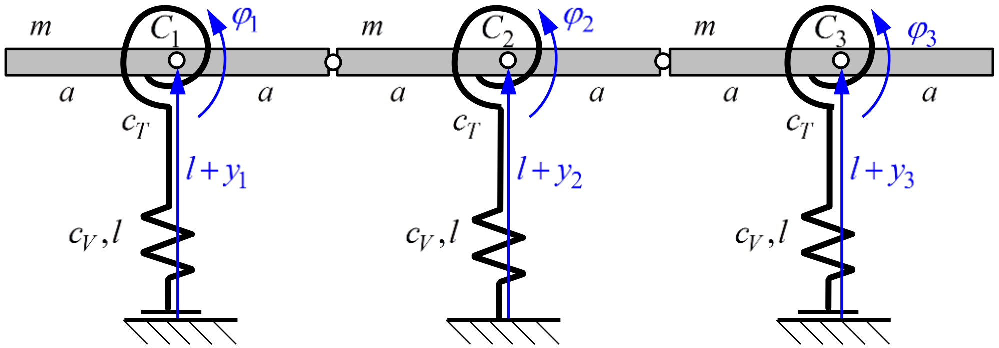
$$\ddot{\hat{\mathbf{y}}} + \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$$

e) Welche Eigenfrequenzen des Systems lassen sich daraus ablesen?

$\omega_1 =$ _______, $\omega_2 =$ _______

Aufgabe 3 (18 Punkte)

Das Foto zeigt eine dreiteilige Wippe bei Arzl im Pitztal, Österreich. Diese besteht aus drei Sitzflächen (jeweils Sitzlänge $2a$, Masse m und Trägheitsmoment $ma^2/3$ bez. Schwerpunkt C_i), die miteinander gelenkig verbunden sind und auf Spiralfedern ruhen. Die Bewegung der Sitzflächen wird zunächst jeweils durch Hub y_i und kleine Winkel φ_i beschrieben. Durch die Spiralfedern entstehen jeweils Hubkräfte (vertikale Steifigkeit c_V, ungespannte Federlänge l) und Momente (Torsionssteifigkeit c_T). Horizontale Federkräfte werden vernachlässigt.



a) Wie groß ist die kinetische Energie des Gesamtsystems?

$T =$ ______________________________________

____

b) Wie groß ist die potentielle Energie des Gesamtsystems?

$U =$ ______________________________________

____

c) Welche linearisierten Beziehungen ergeben sich aus den Gelenkverbindungen für die Bewegungsgrößen?

☐ $y_1 + a\varphi_1 = y_2 + a\varphi_2$	☐ $y_3 + a\varphi_3 = y_2 + a\varphi_2$
☐ $y_1 + a\varphi_1 = y_2 - a\varphi_2$	☐ $y_3 + a\varphi_3 = y_2 - a\varphi_2$
☐ $y_1 - a\varphi_1 = y_2 + a\varphi_2$	☐ $y_3 - a\varphi_3 = y_2 + a\varphi_2$
☐ $y_1 - a\varphi_1 = y_2 - a\varphi_2$	☐ $y_3 - a\varphi_3 = y_2 - a\varphi_2$

d) Bilden Sie folgende Ableitungen der Lagrange-Funktion

$$L = m\left[\frac{\left(\dot y_2 - a\left(\dot\varphi_1+\dot\varphi_2\right)\right)^2}{2} + \frac{\dot y_2^2}{2} + \frac{\left(\dot y_2 + a\left(\dot\varphi_2+\dot\varphi_3\right)\right)^2}{2}\right]$$
$$+\frac{ma^2}{3}\,\frac{\dot\varphi_1^2+\dot\varphi_2^2+\dot\varphi_3^2}{2}$$
$$-c_V\left[\frac{\left(y_2 - a\left(\varphi_1+\varphi_2\right)\right)^2}{2} + \frac{y_2^2}{2} + \frac{\left(y_2 + a\left(\varphi_2+\varphi_3\right)\right)^2}{2}\right]$$
$$-c_T\,\frac{\varphi_1^2+\varphi_2^2+\varphi_3^2}{2} - mg\left[3y_2 + a\left(\varphi_3-\varphi_1\right)\right]$$

und fassen Sie dabei ähnliche Terme möglichst gut zusammen:

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot y_2} =$ ______________________________________

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_1} =$ ______________________________________

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_2} =$ ______________________________________

$\dfrac{\partial L}{\partial \dot\varphi_3} =$ ______________________________________

$$\frac{\partial L}{\partial y_2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi_3} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

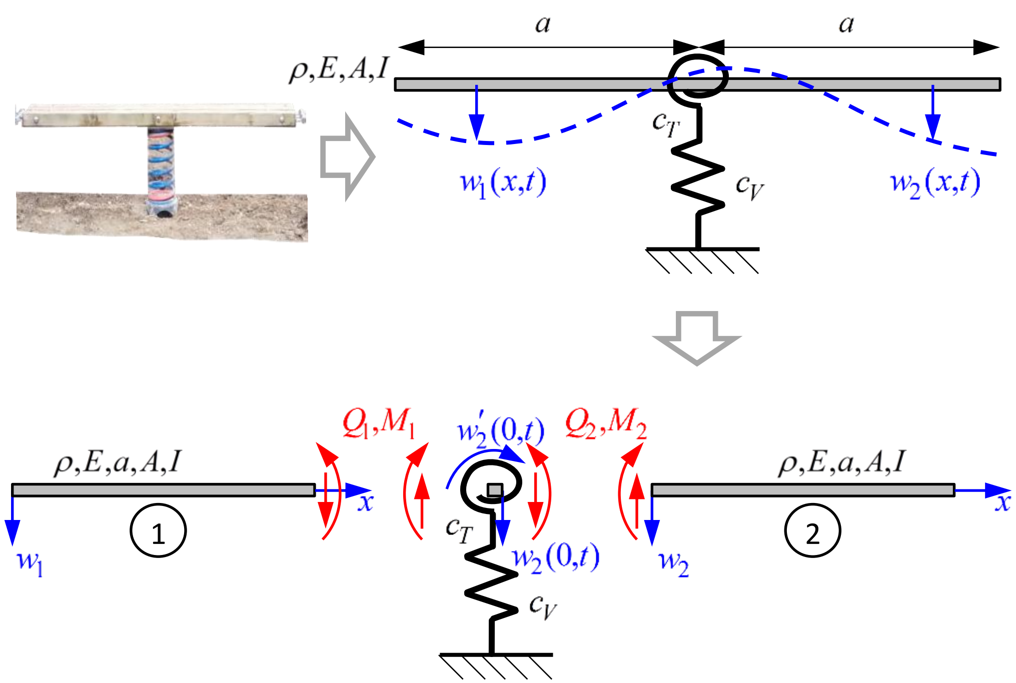
e) Wie lautet die Bewegungsgleichung des Systems?

$$\left[\begin{array}{c|ccc} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \ddot{y}_2 \\ \hline \ddot{\varphi}_1 \\ \ddot{\varphi}_2 \\ \ddot{\varphi}_3 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|ccc} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} y_2 \\ \hline \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \quad \\ \\ \\ \\ \end{array}\right]$$

Aufgabe 4 (28 Punkte)

Im Folgenden sollen freie Schwingungen einer einzelnen, verformbaren Sitzfläche untersucht werden. Dazu wird diese in zwei elastische Balken (jeweils Länge a, Querschnittsfläche A, Trägheitsmoment I, Dichte ϱ, Elastizitätsmodel E) und eine dünne masselose Scheibe dazwischen aufgeteilt. Die Schnittkräfte und -momente werden mit $Q_i, M_i,\ i=1,2,$ bezeichnet. Durch die Spiralfeder entsteht an der Zwischenscheibe eine Hubkraft (vertikale Steifigkeit c_V) und ein Moment (Torsionssteifigkeit c_T). Die Feder ist für $w_1(a,t)=0$, $w_1'(a,t)=0$ entspannt, Gewichtskräfte werden vernachlässigt.

a) Wie lauten die Randbedingungen für den linken Balken 1?



____________________, ____________________

____________________, ____________________

b) Wie lauten die Randbedingungen für den rechten Balken 2?

__________________ , __________________

__________________ , __________________

c) Formulieren Sie Kräfte- und Momentengleichgewicht für die masselose Zwischenscheibe.

__________________ , __________________

d) Welche beiden Beziehungen folgen daraus für die Durchbiegungen am Übergang?

☐ $EIw_1''(a,t) - c_T w_2'(0,t) - EIw_2''(0,t) = 0$

☐ $EIw_1''(a,t) + c_T w_2'(0,t) - EIw_2''(0,t) = 0$

☐ $EIw_1'''(a,t) + c_V w_2(0,t) + EIw_2'''(0,t) = 0$

☐ $-EIw_1'''(a,t) + c_V w_2(0,t) + EIw_2'''(0,t) = 0$

e) Welche zusätzlichen geometrischen Übergangsbedingungen sind von $w_1(a,t)$, $w_1'(a,t)$, $w_2(0,t)$ und $w_2'(0,t)$ zu erfüllen?

__________________ , __________________

f) Der Produktansatz $w_i(x,t) = W_i(x)y(t)$ führt mit der Abkürzung $\gamma^4 = \omega^2 \rho A / EI$ in beiden Balken auf die allgemeine Lösung

$$W_i(x) = C_i \cos\gamma x + D_i \sin\gamma x + E_i \cosh\gamma x + F_i \sinh\gamma x, \quad i = 1,2 .$$

Berechnen Sie unter Verwendung der Abkürzungen $c = \cos\gamma a$, $s = \sin\gamma a$, $ch = \cosh\gamma a$, $sh = \sinh\gamma a$ folgende Randwerte:

$W_i(0) =$ ________ , $W_i(a) =$ ______________________

$W_i'(0) =$ ________ , $W_i'(a) =$ ______________________

$W_i''(0) =$ ________ , $W_i''(a) =$ ______________________

$W_i'''(0) =$ ________ , $W_i'''(a) =$ ______________________

g) Setzt man diese Beziehungen in die Rand- und Übergangsbedingungen ein, ergibt sich ein homogenes lineares Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ für die unbekannten Koeffizienten. Die Übergangsbedingungen sind bereits eingetragen. Ergänzen Sie im oberen Bereich Randbedingungen des linken und unten des rechten Randes der Sitzfläche.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ c & s & ch & sh & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -s & c & sh & ch & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -\gamma^2 EI\,c & -\gamma^2 EI\,s & \gamma^2 EI\,ch & \gamma^2 EI\,sh & \gamma^2 EI & \gamma c_T & -\gamma^2 EI & \gamma c_T \\ -\gamma^3 EI\,s & \gamma^3 EI\,c & -\gamma^3 EI\,sh & -\gamma^3 EI\,ch & c_V & -\gamma^3 EI & c_V & \gamma^3 EI \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} C_1 \\ D_1 \\ E_1 \\ F_1 \\ \hline C_2 \\ D_2 \\ E_2 \\ F_2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

h) Welche Bedingung ist zu erfüllen, um Eigenformen zu erhalten?

☐ $\det\mathbf{A} \neq 0$ ☐ $\det\mathbf{A} = 0$ ☐ $\det\mathbf{A} = 1$ ☐ $\det\mathbf{A} = -1$

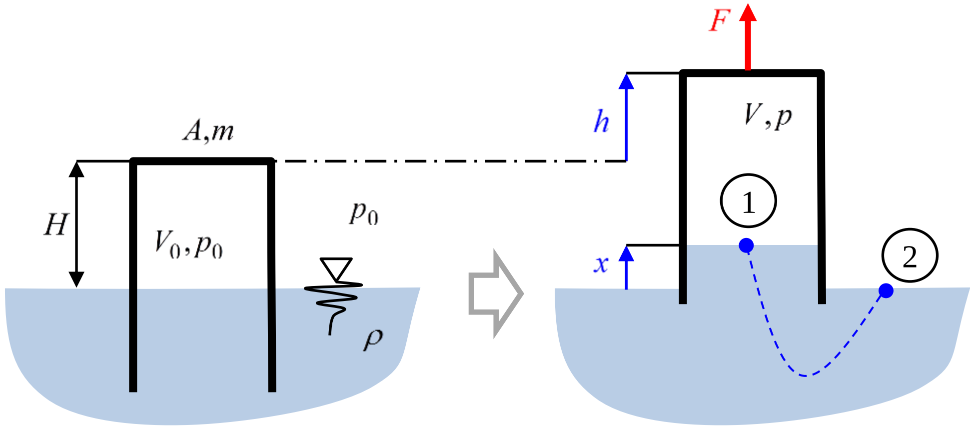
i) Wie nennt man die daraus entstehende Bedingung?

☐ Resonanzbedingung ☐ Orthogonalitätsbedingung

☐ charakterisitische Gleichung ☐ Anfangsbedingung

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein zylindrisches Glas (Querschnittsfläche A, Masse m) wird bei Luftdruck p_0 in einen Wasserbehälter (Dichte ρ) eingetaucht und umgestülpt, wodurch ein Hohlraum (Höhe H) mit Luft (Druck p_0) entsteht. Anschließend wird das Glas um h angehoben, wodurch sich die Wassersäule im Glas um x hebt.



a) Formulieren Sie die Bernoulli-Gleichung für die Punkte 1 und 2 in der angehobenen Situation.

____

b) Wie groß sind die Volumina in der Ausgangssituation und nach Heben des Glases?

$V_0 =$ _________, $V =$ ______________

c) Für die Luft im Glas gilt das ideale Gasgesetz $pV=const$. Welche Beziehung folgt daraus mit den Volumina in Teilaufgabe b)?

____

d) Welche Gleichung ergibt sich für den Hub x der Wassersäule?

☐ $\rho g x^2 + \left(p_0 + \rho g(H+h)\right)x + p_0 h = 0$

☐ $\rho g x^2 - \left(p_0 + \rho g(H+h)\right)x + p_0 h = 0$

☐ $\rho g x^2 + \left(p_0 + \rho g H\right)x - p_0 h = 0$

☐ $\rho g x^2 - \left(p_0 + \rho g H\right)x - p_0 h = 0$

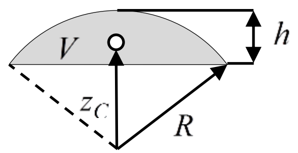
e) Wie groß ist die benötigte Hubkraft F auf das Glas der Masse m? (Hinweis: die Variable x darf verwendet werden, die Auftriebskraft der sehr dünnen Glaswand ist vernachlässigbar)

$F =$ ______________

Aufgabe 6 (7 Punkte)

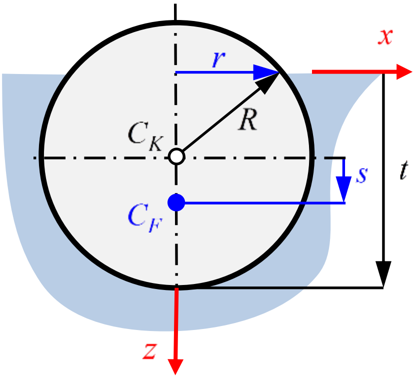
Eine Boje hat die Form einer homogenen Kugel (Radius R). Sie ist um $t<2R$ eingetaucht.

Hinweis zu Volumen und Schwerpunkt von Kugelabschnitten:



$$V = \frac{\pi}{3} h^2 (3R - h)$$

$$z_C = \frac{3}{4} \frac{(2R-h)^2}{3R-h}$$



a) Wie groß ist das Volumen des verdrängten Fluids, d.h. des **untergetauchten** Kugelabschnitts?

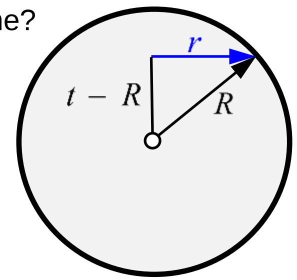
$V =$ ______________

b) Um welche Strecke liegt der Mittelpunkt C_F des verdrängten Fluids unter dem Bojenschwerpunkt C_K?

$s =$ ______________

c) Wie groß ist das Radiusquadrat der Schwimmfläche?

$r^2 =$ ______________



d) Welches Flächenträgheitsmoment der Schwimmfläche ergibt sich daraus?

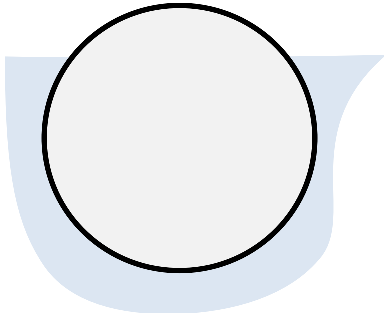
$I_y =$ ______________

e) Bestimmen Sie die Metazenterhöhe der Boje.

$h_M =$ ______________

f) Zeichnen Sie die resultierende Druckverteilung auf die Boje ein und begründen Sie damit dieses Ergebnis.

res. Druckverteilung:



Begründung für h_M-Ergebnis:

____

____

____

____

ENDE