9 Erzwungene Schwingungen durch verteilte Kräfte

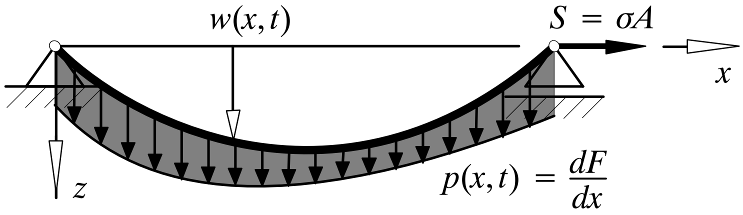
Aufgabe 1

Zeigen Sie, dass folgende Systeme der inhomogenen eindimensionalen Wellengleichung

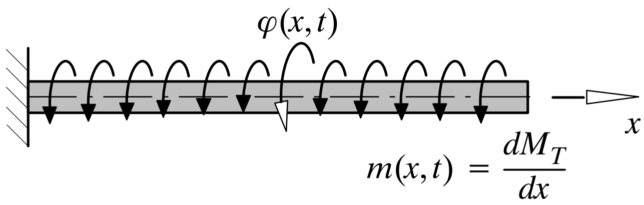
$$\ddot{w} = c^2 w'' + q(x,t)$$

mit geeigneten Definitionen für die Wellenfortpflanzungsgeschwindigkeit c und die Anregung $q(x,t)$ genügen:

a) Saite (Querschnitt A, Dichte ϱ) unter Vorspannung $S = \sigma A$ mit einer zeit- und ortsveränderlichen Linienlast $p(x,t)$.

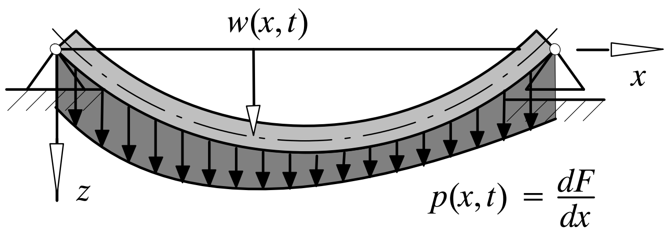


b) Torsionsstab (polares Flächenträgheitsmoment I_p, Dichte ϱ, Schubmodul G) mit einem auf die Länge bezogenen Torsionsmoment $m(x,t)$.



Aufgabe 2

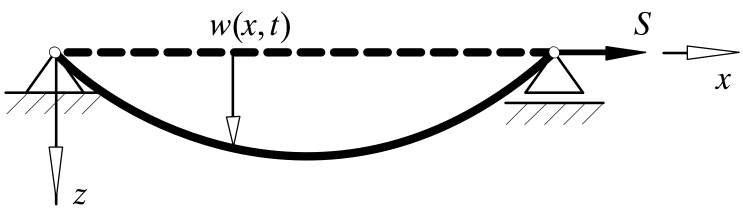
Zeigen Sie, dass die Schwingungen des Bernoulli–Balkens (Biegesteifigkeit EI, Querschnitt A, Dichte ϱ) unter einer zeit- und ortsveränderlichen Linienlast $p(x,t)$ durch folgende partielle Differentialgleichung beschrieben werden:



$$\ddot{w} + \frac{EI}{\varrho A} w^{IV} = \frac{p(x,t)}{\varrho A} \,.$$

Aufgabe 3

Ein schweres Seil (Länge L, Querschnitt A, Dichte ϱ, Vorspannung S) fällt aus der horizontalen Ruhelage unter seinem Eigengewicht.



a) Wie groß ist die Linienlast durch das Eigengewicht? Formulieren Sie das zugehörige Randwertproblem (Hinweis: Verwenden Sie eine konstante Linienlast und vernachlässigen Sie den Einfluss des kleinen Durchhangs).

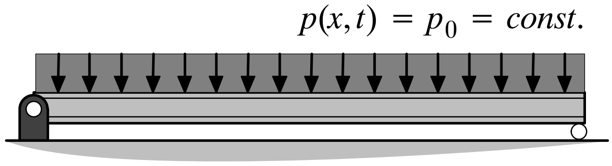
b) Wie lauten die Eigenfrequenzen und normierten Eigenfunktionen des homogenen Problems? Führen Sie damit eine Modaltransformation der inhomogenen Differentialgleichung durch.

c) Bestimmen Sie die modale Lösung für die gegebenen Anfangsbedingungen.

d) Ermitteln Sie die Schwingungen $w(x,t)$ durch Rücktransformation.

Aufgabe 4

Ein Balken (Länge L, Querschnitt A, Dichte ϱ, Biegesteifigkeit EI) mit gelenkigen Lagern wird mit einer konstanten Linienlast p_0 beaufschlagt.



a) Formulieren Sie das zugehörige Randwertproblem.

b) Wie lauten die Eigenfrequenzen und normierten Eigenfunktionen des homogenen Problems?

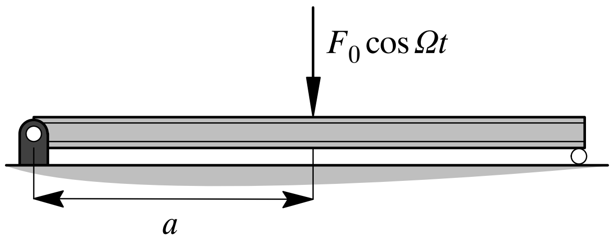
c) Führen Sie damit eine Modaltransformation der inhomogenen Differentialgleichung durch.

d) Bestimmen Sie eine zeitinvariante Partikulärlösung für die gegebene konstante Belastung.

e) Bestimmen Sie alternativ die Durchbiegung mit den Methoden der Technischen Mechanik I (Technische Biegelehre). Vergleichen Sie die daraus ermittelte Durchbiegung in der Balkenmitte mit obiger Partikulärlösung, wenn man dort nur das erste Reihenglied heranzieht.

Aufgabe 5

Ein Balken (Länge L, Querschnitt A, Dichte ϱ, Biegesteifigkeit EI) mit gelenkigen Lagern wird an der Stelle $x = a$ mit einer periodischen Einzelkraft $F_0 \cos \Omega t$ beaufschlagt. Eine solche Einzelkraft kann mit Hilfe der Dirac'sche Delta-Funktion durch die Linienlast



$$p(x,t) = F_0 \cos \Omega t \, \delta(x-a)$$

dargestellt werden, wobei die Delta-Funktion folgende Eigenschaften hat:

$$\delta(x-a) = \begin{cases} \infty & \textit{für} \quad x = a, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases} \qquad \int_0^L \delta(x-a)\,dx = 1, \qquad \int_0^L f(x)\,\delta(x-a)\,dx = f(a)$$

für $a \in (0,L)$.

a) Führen Sie eine Modaltransformation der inhomogenen Differentialgleichung durch.

b) Bestimmen Sie eine modale Partikulärlösung für die gegebene Belastung.

c) Ermitteln Sie die Partikulärlösung $w_p(x,t)$ durch Rücktransformation.